PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt II.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule II.

WYDANE NAKŁADEM AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH
WARSZAWA — 1928.

PRACE
INSTYTUTU AERODYNAMICZNEGO
W WARSZAWIE

Prowadzone pod kierunkiem prof. C. Witoszyńskiego.

Zeszyt II.

TRAVAUX
DE L'INSTITUT AÉRODYNAMIQUE
DE VARSOVIE

Exécutés sous la direction du prof. C. Witoszyński.

Fascicule II.

WYDANE NAKŁADEM AKADEMJI NAUK TECHNICZNYCH
WARSZAWA — 1928.

TREŚĆ:

SOMMAIRE:

ERRATA:

Page 5, ligne 14 en remontant, *au lieu de* au-dessus, *lire* au-dessous *et vice-versa.*

„ 9, „ 10 *au lieu de* ils, *écrire* il.

„ 16, „ 1 au numérateur de la fraction *écrire* x^2 *au lieu de* x^3.

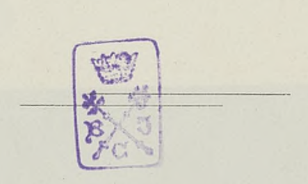
„ 32, „ 13 en remontant, dans la formule (28) *remplacer* R_0 *par* R.

„ 32, „ 10 „ „ , dans la formule (28a) *remplacer* R_0 *par* R.

„ 45, „ 4 au numérateur de la dernière fraction *remplacer* $\mathfrak{S}$ *par* S.

„ 55, sur la fig. 3 *remplacer les lettres* S_1, O_1 *par* G_1, Q_1.

„ 58, „ „ „ 4 *remplacer les lettres* E, F, S *par* E_1, F_1, G_1.



Druk. Kooperatywy Pracowników Drukarskich, Warszawa, Zielna 47. Telefon 19-57.

JULJAN BONDER, ing. et PIOTR SZYMAŃSKI, dr. phil.

SUR LE MULTIPLAN EN TANDEM.

Le problème concernant les qualités des monoplans et des multiplans occupe depuis longtemps les esprits des constructeurs des avions; jusqu'aujourd'hui, il ne peut pas être consideré comme résolu définitivement. Sans doute, en comparant un biplan ordinaire avec un monoplan, tous les deux possédant la même surface portante et le même allongement des ailes, c'est le monoplan qui a la supériorité au point de vue aérodynamique; mais ceci est racheté par sa grande étendue. Or, l'augmentation de celle - ci en dehors de certaines limites produit des difficultés de construction insurmontables; donc, le problème des multiplans reste toujours ouvert et important. Cela vaut la peine de faire quelques efforts pour étudier les propriétés des multiplans et surtout des biplans en les examinant non seulement dans le cas des ailes situées d'une façon habituelle l'une au dessous de l'autre, mais encore dans d'autres configurations rationnelles. Remarquons que plusieurs autres questions spéciales se rattachent à ce problème, par exemple — la théorie de l'hélice qui peut être regardée à un certain point de vue comme un multiplan possédant un nombre infini d'ailes situées d'une manière déterminée.

Dans le travail présent nous nous bornons à l'étude des propriétés aérodynamiques des systèmes de profils situés l'un à l'arriére de l'autre. Nous posons le problème encore plus simplement en considérant le mouvement comme un écoulement plan autour de n profils rectilignes, tous situés sur la même droite (l'axe x) l'un à la suite de l'autre.

§ 1.

Nous partirons du potentiel du professeur Witoszyński [1]). C'est le potentiel d'écoulement autour d'un seul profil qui se distingue des autres fonctions, proposées dans ce but, par sa concordance meilleure avec les résultats de l'expérience [2]).

---

[1]) M. Grammel a donné une solution particulière de ce problème en se basant cependant sur la théorie de Joukowski. Voir: R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig, 1917, Vieweg & Sohn, §§ 14 — 16.

[2]) Voir: C. Witoszyński, La Mécanique des Profils d'Aviation, Paris, 1924 — éd. Chiron. C. Witoszyński, Modification du principe de circulation, Proceedings of the international congress for applied mechanics, Delft, 1925.
ing. Stefan Neumark, Sur les formes diverses du potentiel servant à calculer les forces qui agissent sur les profils d'aviation, Travaux de Institut Aerodyn. de Varsovie, Fascicule I, 1927.

Soit $|Z| = a$ l'équation d'un cercle situé dans le plan d'une variable complexe:

$$Z = X + iY = re^{i\vartheta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pour l'écoulement autour de ce profil circulaire le potentiel complexe de M. Witoszyński a la forme suivante:

$$f(Z) = \Phi + i\Psi = -u\left(Ze^{i\alpha} + \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z}\right) + \frac{8\, i\, u\, a^{3/2} \sin\alpha}{Z^{1/2} + a^{1/2}}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

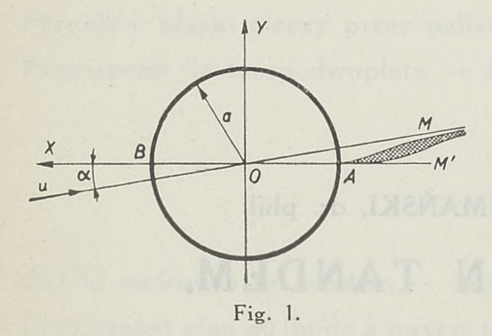


Fig. 1.

où Φ désigne le potentiel des vitesses; Ψ — la fonction de courant; u — la vitesse du courant à l'infini; α — l'angle que fait cette vitesse avec la direction négative de l'axe X (fig. 1).

En désignant par V_X et V_Y les composantes de la vitesse suivant les directions des axes des coordonnées, on obtient de (2) la formule suivante, donnant la vitesse complexe:

$$V_X - i V_Y = \frac{df(Z)}{dZ} = -u\left(e^{i\alpha} - \frac{a^2 e^{-i\alpha}}{Z^2}\right) - \frac{4\, i u a^{3/2} \sin\alpha}{Z\left(Z^{1/2} + \frac{a}{Z^{1/2}} + 2a^{1/2}\right)}. \quad \ldots \quad (3)$$

Le potentiel (2) et la vitesse complexe (3) sont représentés par les fonctions non uniformes, ayant un point critique à l'origine des coordonnées 0. Il faut évidemment se borner à une de deux déterminations du radical $Z^{1/2}$. On choisit celle qui est positive pour Z réels et plus grands que a. Puis, on fait une coupure suivant les deux lignes de courant AM et AM' issues du point A du cercle $|Z| = a$ jusqu'à l'infini (fig. 1). Le prolongement de cette coupure jusqu'au point critique 0 est remplacé ici par notre cercle qui se présente comme une coupure naturelle puisque nous ne considérons jamais que des points situés à l'extérieur de ce cercle. La région limitée par les lignes AM et AM' est de cette manière exclue de notre champ des vitesses; elle s'appelle la couche de discontinuité.

Le coefficient $8\sin\alpha$ du deuxième terme du potentiel (2) est déterminé par la condition que la vitesse au point A soit nulle, ce qui donne la valeur finie de la vitesse à la pointe du profil transformé. Cette pointe doit correspondre au point A du profil circulaire primitif.

Ces remarques faites, passons au problème posé dans l'introduction. Il s'agit du potentiel d'écoulement autour de n segments de l'axe x.

Pour nous rendre compte du caractère de ce problème, nous commencerons par l'étude de l'écoulement autour d'un seul profil rectiligne.

Soit $z = x + iy$; la fonction

$$z = Z + \frac{a^2}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

transforme, comme on sait, d'une façon conforme notre cercle du rayon a en un segment $(-2a, +2a)$ de l'axe x (fig. 2). La longueur l de ce segment est donc:

$$l = 4a. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Pour obtenir le champ des vitesses dans le plan z, il faut déterminer préalablement Z en fonction de z. Il vient de la formule (4):

$$Z = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

En y introduisant la longueur $l = 4a$ du profil rectiligne, on aura:

$$Z = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

On voit immédiatement que Z est représenté par une fonction non uniforme de z. Pour la rendre uniforme, il faut fixer la détermination du radical $\sqrt{z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$, conformément aux conditions physiques du problème.

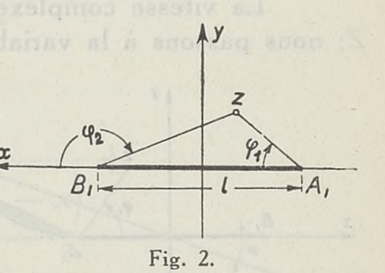


Fig. 2.

Or, l'une de deux déterminations de la fonction (7) donne la représentation du plan de z sur l'intérieur, l'autre sur l'extérieur du cercle $|Z| = a$. Nous choisirons donc celle d'eux qui permet d'atteindre les valeurs infinies de Z pour $z \rightarrow \infty$. On satisfaira à cette condition en prenant la valeur positive du radical $\sqrt{z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ pour z réels et plus grands que $\frac{l}{2}$.

La nature même du problème nous conduit à considérer le segment $\left(-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2}\right)$, joignant les points critiques du radical, comme une coupure, ce qui rend uniforme la détermination choisie.

Il est utile de donner une règle pratique dont on pourrait se servir pour calculer la valeur du radical en question.

Soient $-\pi \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi$ et $-\pi \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi$ les angles que font les vecteurs $z + \frac{l}{2}$ et $z - \frac{l}{2}$ avec la direction positive de l'axe x (fig. 2). Selon la convention faite, concernant la détermination du radical, les arguments des facteurs $z + \frac{l}{2}$ et $z - \frac{l}{2}$ seront respectivement $\varphi_1 + 2k\pi$ et $\varphi_2 + 2k\pi$, où k désigne le nombre de circuits autour du segment $A_1 B_1$. L'argument du radical $\sqrt{\left(z + \frac{l}{2}\right)\left(z - \frac{l}{2}\right)}$ sera alors $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + 2k\pi$ ou simplement $\frac{\varphi_2 + \varphi_2}{2}$, ce qui ne dépend déjà du nombre de circuits autour de notre segment. On calculera donc la valeur du radical ci-dessus à l'aide de la formule:

$$\sqrt{z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left|z^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right|}\left(\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + i \sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad . \quad . \quad (8)$$

Passons maintenant à la détermination du champ des vitesses dans le plan du profil rectiligne c'est à dire dans le plan de z.

Nous partirons de la formule connue

$$v_x - i v_y = \frac{df(Z)}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

qui donne la vitesse complexe d'écoulement autour du profil transformé: ici v_x et v_y désignent les composantes de cette vitesse et $f(Z)$ — le potentiel d'écoulement autour du profil

circulaire primitif. En introduisant dans la formule (9) la valeur de la dérivée (3) du potentiel (1), nous en obtiendrons:

$$v_x - i\,v_y = -\,u\cos\alpha - i\,u\sin\alpha\,\frac{Z+\dfrac{a^2}{Z}}{Z-\dfrac{a^2}{Z}} - \frac{4\,i\,u\,a^{3/2}\sin\alpha}{\left(Z-\dfrac{a^2}{Z}\right)\left(Z^{1/2}+\dfrac{a}{Z^{1/2}}+2\,a^{1/2}\right)}. \quad (10)$$

La vitesse complexe $v_x - i\,v_y$ est exprimée ici par intermédiaire de la variable Z; nous passons à la variable z et au paramètre l en nous servant des formules (4) et (6).

Fig. 3.

Or,

$$Z+\frac{a^2}{Z}=z;\quad \frac{a^2}{Z}=\frac{z}{2}-\sqrt{\frac{z^2}{4}-a^2};$$

d'où:

$$Z-\frac{a^2}{Z}=2\sqrt{\frac{z^2}{4}-a^2}=\sqrt{z^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2};$$

enfin:

$$Z^{1/2}+\frac{a}{Z^{1/2}}=\sqrt{Z+2a+\frac{a^2}{Z}}=\sqrt{z+2a}=\sqrt{z+\frac{l}{2}}.$$

Donc:

$$v_x - i\,v_y = -\,u\cos\alpha - i\,u\sin\alpha\,\frac{z}{\sqrt{\left(z+\dfrac{l}{2}\right)\left(z-\dfrac{l}{2}\right)}} -$$

$$-\,\frac{i\,u\,l\sin\alpha}{2\left(1+\sqrt{\dfrac{z+\dfrac{l}{2}}{l}}\right)\sqrt{\left(z+\dfrac{l}{2}\right)\left(z-\dfrac{l}{2}\right)}}\,.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (11)$$

Il nous reste encore de fixer la détermination du radical $\sqrt{z+\dfrac{l}{2}}$ dont le point critiqe $\left(-\dfrac{l}{2}\right)$ correspond au point $Z=-\,a$ dans le plan de Z. Dans ce plan (fig. 1) on a fait déjà la coupure MAM', composée de deux lignes de courant issues du point A. La transformation (4) fait correspondre aux lignes AM et AM' deux lignes de courant A_1M_1 et $A_1M'_1$ situées dans le plan de z et issues du point $z=-\dfrac{l}{2}$ (fig. 3). Il suffit donc de considérer la ligne $M_1A_1M'_1$ comme coupure en admettant encore que la valeur de $\sqrt{z+\dfrac{l}{2}}$ est positive pour z réels et plus grands que $\dfrac{l}{2}$.

Nous ferons usage de la formule (11) pour calculer la vitesse aux points du segment A_1B_1, donc pour: $-\dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}$ et $y=0$. On vérifiera immédiatement que $v_y=0$, c'est-à-dire que A_1B_1 est une ligne de courant. La deuxième composante v_x de la vitesse y obtient deux valeurs distinctes suivant le cas où l'on se trouve au-dessus ou bien au-dessous du profil. Nous désignerons ces deux valeurs respectivement par v_s et v_i.

Conformément à la convention faite concernant les déterminations des radicaux, on a pour la partie supérieure du profil $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, donc:

$$v_s = - u \cos\alpha - u \sin\alpha \frac{x}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} - x\right)}} -$$

$$- \frac{u\, l \sin\alpha}{2\left(1 + \sqrt{\frac{x + \frac{l}{2}}{l}}\right)\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} - x\right)}} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

et pour la partie inférieure $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi$, par conséquent:

$$v_i = - u \cos\alpha + u \sin\alpha \frac{x}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} - x\right)}} +$$

$$+ \frac{u\, l \sin\alpha}{2\left(1 + \sqrt{\frac{x + \frac{l}{2}}{l}}\right)\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} - x\right)}} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

On voit que les vitesses v_s et v_i deviennent infinies au point $z = \frac{l}{2}$. Quant aux vitesses au point $z = -\frac{l}{2}$, elles se présentent sous la forme indéterminée. Mais il suffit d'écrire les formules (12) et (13) de la manière suivante:

$$v_{s,i} = - u \cos\alpha \mp \frac{u \sin\alpha}{\sqrt{\frac{l}{2} - x}} \cdot \frac{\sqrt{x + \frac{l}{2}} + \frac{x}{\sqrt{l}}}{1 + \sqrt{\frac{x + \frac{l}{2}}{l}}} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

pour obtenir:

$$(v_s)_{z = -\frac{l}{2}} = - u \cos\alpha + \frac{u}{2} \sin\alpha; \quad (v_i)_{z = -\frac{l}{2}} = - u \cos\alpha - \frac{u}{2} \sin\alpha. \quad (15)$$

Donc, la valeur absolue de la vitesse au bord de fuite est plus grande au-dessus du profil que celle au-dessous, la différence étant égale à $u \sin\alpha$.

§ 2.

La généralisation des formules, que nous venons d'établir, nous permettra d'étudier l'écoulement autor de n segments quelconques, situés sur l'axe x, ce qui constitue le but de ce travail.

Les considérations du § précédent nous fournissent quelques indications sur la forme de cette généralisation. Les conditions physiques du problème servent à déterminer les expressions cherchées.

Nous prendrons pour point de départ la formule (11) qui donne la vitesse complexe d'écoulement.

La deuxième partie de cette formule est composée de trois termes. Puisque chacun d'eux est réel sur le segment $B_1 A_1$, on peut considérer cet écoulement comme résultant de trois mouvements superposés. L'expression généralisée de la vitesse complexe sera formée d'une façon analogue.

Avant d'aborder le problème, précisons les conditions auxquelles doit satisfaire la formule généralisée.

1) Le premier terme — u cosα ne change pas.

2) Le deuxième et le troisiéme termes doivent être adaptés aux nouvelles conditions d'écoulement autour de notre multiplan en tandem.

3) Le deuxième terme pour $z = \infty$ doit ce reduire à — iu sinα.

4) Le troisième terme, représentant le mouvement discontinu, doit s'annuler à l'infini comme $z^{-3/2}$.

Pour que la continuité de conditions physiques soit conservée il est nécessaire encore que l'expression généralisée se ramène à la formule (11) dans les deux cas suivants:

5) quand tous les segments se rapprochent l'un de l'autre de la manieré qu'ils constituent un seul segment;

6) quand tous les segments, excepté l'un d'eux, s'éloignent vers l'infini.

Ce sont les conditions qui déterminent complètement les coefficients de l'expression cherchée.

Ces remarques faites, nous pouvons passer à la construction même de la formule.

Envisageons les n segments $(b_1\, a_1)$, $(b_2\, a_2)$, ... $(b_n\, a_n)$, tous situés sur l'axe x et n'empiétant pas l'un sur l'autre (fig. 4). Soit: $b_1 > a_1 \geqslant b_2 > a_2 \geqslant \dots \geqslant b_n > a_n$.

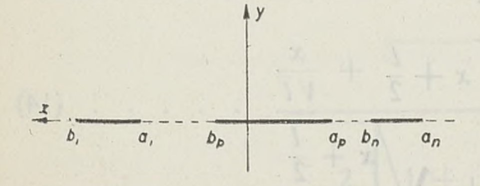


Fig. 4.

Posons encore:

$$B_n(z) = (z - b_1)(z - b_2) \dots\dots, (z - b_n); \quad (16)$$

$$A_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots\dots (z - a_n). \quad (17)$$

En ayant égard à toutes les conditions, nous écrirons l'expression généralisée de la vitesse complexe sous la forme:

$$v_x - i\,v_y = -\,u \cos\alpha - i\,u \sin\alpha \,\frac{A_n(z) + B_n(z)}{2\sqrt{A_n(z)\,.\,B_n(z)}} -$$

$$- \,i\,u \sin\alpha \,\frac{A_n(z) - B_n(z)}{2\left[1 + \sqrt{\dfrac{A_n(z)}{A_n(z) - B_n(z)}}\right]\sqrt{A_n(z)\,.\,B_n(z)}} \dots, \quad (18)$$

Grâce à cette forme, chacun de ces trois termes, constituant la formule en question, peut avoir la signification de la vitesse d'un écoulement autour de nos segments. En effet, les polynomes B_n et A_n ayant des signes contraires sur tous les segments $(b_p\, a_p)$, la valeur du radical $\sqrt{A_n(z)\,.\,B_n(z)}$ y est imaginaire. Quant au radical $\sqrt{\dfrac{A_n(z)}{A_n(z) - B_n(z)}}$, il conserve la valeur réelle. Or, la composante v_y de la vitesse y s'annule; il en résulte que les segments en question sont des lignes de courant.

Il reste encore à démontrer que les conditions (3), (4), (5) et (6) sont remplies.

On vérifiera immédiatement que ceci a lieu pour les conditions (3) et (4), grâce aux degrés des polynomes $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$.

Passons donc aux conditions (5) et (6). Nous posons:

$$a_1 = b_2,\ a_2 = b_3, \dots\dots\dots a_{n-1} = b_n. \dots\dots\dots (19)$$

Comme les distances entre les extremités des segments voisins s'annulent, nous n'aurons qu'un seul segment $(b_1\ a_n)$ dont la longueur est la somme de celles des segments particuliers.

En même temps:

$$\sqrt{A_n \cdot B_n} = (z - b_2) \ldots \ldots (z - b_n) \sqrt{(z - b_1)(z - a_n)};$$

$$A_n + B_n = (z - b_2) \ldots \ldots (z - b_n)(2z - b_1 - a_n);$$

$$A_n - B_n = (z - b_2) \ldots \ldots (z - b_n) \cdot (b_1 - a_n);$$

d'où:

$$v_x - i v_y = - u \cos\alpha - i u \sin\alpha \frac{z - \frac{b_1 + a_n}{2}}{\sqrt{(z - b_1)(z - a_n)}}$$

$$- i u \sin\alpha \frac{b_1 - a_n}{2\left[1 + \sqrt{\frac{z - a_n}{b_1 - a_n}}\right] \sqrt{(z - b_1)(z - a_n)}};$$

en admettant donc encore: $b_1 = \frac{l}{2}$, et $a_n = -\frac{l}{2}$, on obtient (11) — *c. q. f. d.*

Nous nous occuperons maintenant de la condition (6). Dans ce but, divisons d'abord le numérateur et le dénominateur du deuxième et troisième terme de (18) par $(-1)^{n-1} b_1 b_2 \ldots . b_{k-1} . b_{k+1} \ldots . b_n$. Fixons ensuite la position du segment $(a_k\ b_k)$, et faisons tendre a_p et b_p pour $p \neq k$ vers l'infini en admettant que $\lim \frac{a_p}{b_p} = 1$. Il en résulte:

$$v_x - i v_y = - u \cos\alpha - i u \sin\alpha \frac{z - \frac{b_k + a_k}{2}}{\sqrt{(z - b_k)(z - a_k)}} -$$

$$- i u \sin\alpha \frac{b_k - a_k}{2\left[1 + \sqrt{\frac{z - a_k}{b_k - a_k}}\right] \sqrt{(z - b_k)(z - a_k)}};$$

en posant encore $b_k = - a_k = \frac{l}{2}$, on revient à la formule (11).

Ainsi, toutes les conditions posées précédemment sont remplies.

Avant d'appliquer la formule obtenue (18), il faut la rendre uniforme en choisissant d'une manière convenable les déterminations des radicaux: $\sqrt{A_n(z) \cdot B_n(z)}$ et $\sqrt{\frac{A_n(z)}{A_n(z) - B_n(z)}}$. Les segments $(a_p\ b_p)$, joignants les points critiques du premier de ces radicaux, se présentent ici comme les coupures naturelles, il suffit donc de fixer la valeur de ce radical en un point quelconque du plan. Nous admettons que le radical en question est positif pour z réels et plus grands que b_1. Cette convention faite, la valeur du radical $\sqrt{A_n \cdot B_n}$ peut être calculée pour toute valeur de z, comme suit:

$$\sqrt{A_n(z) \cdot B_n(z)} = \sqrt{|A_n(z) \cdot B_n(z)|} \left(\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right), \quad (20)$$

où φ_1 et φ_2 désignent respectivement les arguments des polynomes A_n et B_n. Pour calculer

φ_1 et φ_2 désignons respectivement par $\varphi_1^{(p)}$ et $\varphi_2^{(p)}$ les arguments des facteurs $z - a_p$ et $z - b_p$, alors:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} + \ldots\ldots, + \varphi_1^{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20')$$

et

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} + \ldots\ldots + \varphi_2^{(n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20'')$$

En ayant égard à la détermination choisie du radical, nous admettons tous ces arguments égals à zéro pour z réels et plus grands que b_1. Tout circuit décrit autour d'un segment $(b_p a_p)$ donne aux $\varphi_1^{(p)}$ et $\varphi_2^{(p)}$ le même accroissement $\pm 2\pi$. Il faut donc, pour se servir de la formule (20), d'attribuer aux $\varphi_1^{(p)}$ et $\varphi_2^{(p)}$ le même multiple de 2π. Il suffit par exemple d'admettre: $-\pi \leqslant \varphi_1^{(p)} \leqslant \pi$; $-\pi \leqslant \varphi_2^{(p)} \leqslant \pi$. Mais nous n'insisterons pas sur cette convention particulière, puisqu'il nous sera utile d'introduire dans la suite les coupures qui seront incompatibles avec cette convention. C'est l'uniformisation du radical $\sqrt{\dfrac{A_n}{A_n - B_n}}$, dont nous allons nous occuper maintenant, qui exige l'introduction de ces coupures.

Mettons d'abord en évidence les points critiques de ce radical. Ce sont les zéros $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ du polynome $A_n(z)$ aussi que ceux du polynome $A_n(z) - B_n(z)$. Nous allons prouver que ce dernier polynome admet une racine et une seule dans chacun d'intervalles (a_p, b_{p+1}) (fig. 4). En effet, si $a_p = b_{p+1}$, le polynome $A_n(z) - B_n(z)$ a une racine $c_p = a_p = b_{p+1}$. Dans le cas contraire, les polynomes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ ont le même signe pour: $a_p > x > b_{p+1}$, donc la fonction $f(x) = \dfrac{B_n(x)}{A_n(x)}$ est positive dans tout l'intervalle (a_p, b_{p+1}). Comme $f(b_{p+1}) = 0$ et $f(a_p) = \infty$, cette fonction varie d'une manière continue de 0 à ∞ lorsque x croit de b_{p+1} à a_p. Il existe donc la valeur c_p de l'intervalle (a_p, b_{p+1}) telle que $f(c_p) = 1$. On a alors: $A_n(c_p) - B_n(c_p) = 0$ *ç. q. f. d.* Le polynome $A_n(z) - B_n(z)$ étant du degré $n - 1$, il n'admet plus de racines que $c_1, c_2, \ldots\ldots c_{n-1}$, déjà trouvées. Alors les points $a_1 \geqslant c_1 > a_2 \geqslant c_2 > \ldots\ldots a_{n-1} \geqslant c_{n-1} > a_n$ constituent l'ensemble de tous les points critiques du radical $\sqrt{\dfrac{A_n}{A_n - B_n}}$.

Pour rendre uniforme ce radical il suffirait d'introduire $2n - 1$ coupures arbitraires, chacune issue du point critique correspondant et s'étendant vers l'infini. Mais la nature physique du problème exige que toute coupure soit une ligne de courant. D'autre part une ligne de courant $z_0 M$, issue du point critique quelconque z_0, cesse d'être la ligne de

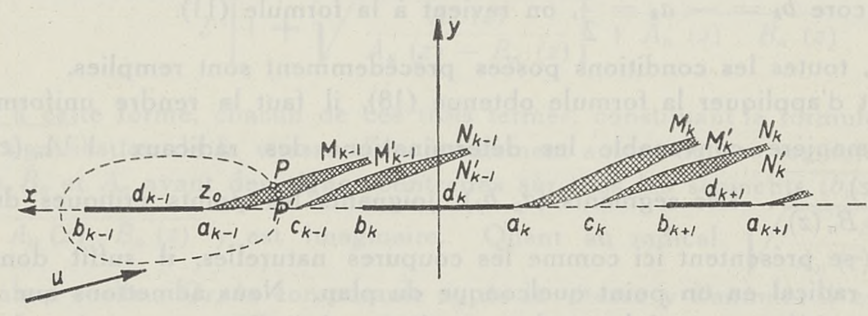


Fig. 5.

courant, si la variable z décrit un circuit autour du point critique z_0. En effet, soit P le point situé sur la coupure $z_0 M$ (fig. 5). Puisque $z_0 M$ est une ligne de courant, la valeur de $v_x - i v_y$ au point P est telle, que la vitesse y soit tangente à la coupure $z_0 M$. Cependant, si la variable z décrit un chemin quelconque, entourant le point z_0, et revient au point P' infiniment voisin à P, mais situé de l'autre côté de la coupure z_0M — la valeur

de $v_x - i v_y$ devient tout différente. La vitesse au P' ne sera plus tangente à $z_0 M$ et la coupure $z_0 M$ cesse d'être une ligne de courant. Il faut donc trouver une autre ligne $z_0 M'$ qui serait une ligne de courant pour le point P'. L'ensemble de ces deux lignes $z_0 M$ et $z_0 M'$ doit être considéré comme une seule coupure.

Si les lignes $z_0 M$ et $z_0 M'$ n'ont qu'un seul point commun z_0, la portion du plan, contenue entre ces deux lignes, sera exclue du champ des vitesses. Cette région du plan s'appelle „la couche de discontinuité". Au contraire, si les lignes $z_0 M$ et $z_0 M'$ ont des points communs autres que z_0, l'interprétation physique de la formule (18) serait impossible, car dans ce cas ils y aurait des portions du plan de z où les mouvements empiéteraient l'un sur l'autre,

Nous admettons dans la suite que pour tout point critique $a_1, a_2 \dots . a_n, c_1 c_2 \dots . c_{n-1}$ du radical $\sqrt{\frac{A_n}{A_n - B_n}}$, on peut trouver un système de deux lignes de courant, issues de ce point et s'étendant vers l'infini. C'est l'hypothèse que nous n'avons pas vérifié directement dans le cas général (pour $n = 1$, il est aisé d'ailleurs la vérifier et, de plus, prouver que les lignes en question ne se coupent pas).

En résumé, nous avons maintenant $2n - 1$ coupures $M_1\, a_1\, M'_1, \dots M_n\, a_n\, M'_n$; $N_1\, c_1\, N'_1, \dots \dots . N_{n-1}\; c_{n-1}\; N'_{n-1}$ (fig. 5) issues des points critiques du radical $\sqrt{\frac{A_n}{A_n - B_n}}$. On calculera ce radical à l'aide de la formule:

$$\sqrt{\frac{A_n}{A_n - B_n}} = \sqrt{\left|\frac{A_n}{A_n - B_n}\right|} \left(\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} + i \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \right), \quad . \quad . \quad (21)$$

où $\varphi_3 = \varphi_3^{(1)} + \varphi_3^{(2)} + \dots . + \varphi_3^{(n-1)}$ désigne l'argument du polynome $A_n - B_n$ et $\varphi_3^{(k)}$ — l'argument du facteur $z - c_k$ de ce polynome.

Pour z réels et plus grands que b_1 nous admettons $\varphi_3^{(k)} = 0$. Pour toute autre valeur de z — l'argument $\varphi_3^{(k)}$ obtient la valeur déterminée par sa variation continue sur un chemin quelconque aboutissant au point z et ne rencontrant pas des coupures. Il est commode d'admettre la même définition de $\varphi_1^{(k)}$ et $\varphi_2^{(k)}$. C'est la convention dont nous avons parlé auparavant. Elle rend la formule (18) uniforme.

Comme une simple application nous calculerons la vitesse aux points $c_1, c_2 \dots . c_{n-1}$. Selon la définition des points c_k on a: $A_n\,(c_k) = B_n\,(c_k)$; donc:

$$v_x - i v_y = - u \cos\alpha - i u \sin\alpha \frac{A_n\; c_k}{\sqrt{A_n^2\,(c_k)}};$$

l'argument φ_1 de $A_n\,(c_k)$ est égal à $-k\pi$, d'où:

$$v_x - i v_y = - u \cos\alpha - i u \sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Comme on voit, la vitesse d'écoulement aux points en question est égale à celle à l'infini (fig. 5).

Comme une seconde application, déterminons la vitesse sur le profil $(b_k\, a_k)$. Puisque cette vitesse obtient des valeurs différentes au-dessous et au-dessus du profil, nous les distinguerons en désignant par $v_i^{(k)}$ respectivement $v_s^{(k)}$ la vitesse sur la partie inférieure resp. supérieure du profil $(b_k\, a_k)$.

On a

au-dessous du profil: $\varphi_1 = -(k-1)\,\pi$; $\varphi_2 = -k\pi$; $\varphi_3 = -(k-1)\,\pi$;

au-dessus du profil: $\varphi_1 = -(k-1)\,\pi$; $\varphi_2 = -(k-2)\,\pi$; $\varphi_3 = -(k-1)\,\pi$;

ainsi l'argument $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ du radical $\sqrt{A_n \, . \, B_n}$ est $-k\pi+\frac{\pi}{2}$ au-dessous et $-(k-1)\pi+$ $+\frac{\pi}{2}$ au-dessus du profil, pendant que $\sqrt{\frac{A_n}{A_n-B_n}}$ est réel et positif sur les deux côtés du profil. D'autre part $A_n(x)$ et $B_n(x)$ ont des signes opposés sur le segment $(b_k\, a_k)$, donc:

$$|A_n(x) \, . \, B_n(x)| = - A_n(x) \, . \, B_n(x).$$

Ensuite: $A_n(x) - B_n(x) = (b_1+b_2+\ldots+b_n-a_1-a_2-\ldots-a_n)(x-c_1)\ldots(x-c_{n-1})$;
mais : $b_1+b_2+\ldots\ldots+b_n-a_1-a_2-\ldots\ldots-a_n \geqslant 0$,
donc pour: $c_{k-1} \geqslant x \geqslant c_k$ on a:

$$|A_n(x) - B_n(x)| = (-1)^{k-1}[A_n(x) - B_n(x)]. \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

D'autre part, pour: $a_{k-1} \geqslant x \geqslant a_k$ on a: $A_n(x) = (-1)^{k-1}|A_n(x)|$,
il en résulte pour: $c_{k-1} \geqslant b_k > x > a_k \geqslant c_k$:

$$\left|\frac{A_n(x)}{A_n(x) - B_n(x)}\right| = \frac{A_n(x)}{A_n(x) - B_n(x)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Ainsi, en vertu des formules (18, 20, 21 et 24), on obtient:

$$v_i^{(k)} = -u\cos\alpha - u\sin\alpha \frac{(-1)^k[A_n(x) + B_n(x)]}{2\sqrt{-A_n(x) \, . \, B_n(x)}} -$$

$$-u\sin\alpha \frac{(-1)^k[A_n(x) - B_n(x)]}{2\left[1+\sqrt{\frac{A_n(x)}{A_n(x)-B_n(x)}}\right]\sqrt{-A_n(x) \, . \, B_n(x)}}; \quad \ldots \quad (25')$$

$$v_s^{(k)} = -u\cos\alpha + u\sin\alpha \frac{(-1)^k(A_n(x) + B_n(x))}{2\sqrt{-A_n(x) \, . \, B_n(x)}} +$$

$$+u\sin\alpha \frac{(-1)^k[A_n(x) - B_n(x)]}{2\left[1+\sqrt{\frac{A_n(x)}{A_n(x)-B_n(x)}}\right]\sqrt{-A_n(x) \, . \, B_n(x)}}. \quad \ldots \quad (25'')$$

Pour nous rendre compte de la répartition des vitesses sur le profil, nous déterminerons encore le signe du polynome $A_n(x) + B_n(x)$. Le raisonnement tout-à-fait analogue au précédent à l'aide duquel nous avons trouvé les racines du polynome $A_n(x) - B_n(x)$, nous permettra déterminer les racines $d_1, d_2, \ldots . d_n$ du polynome en question. En effet, les polynomes $A_n(x)$ et $B_n(x)$ ayant des signes contraires dans tous les points intérieurs du segment $(b_k\, a_k)$ et s'annulant l'un à l'extremité b_k et l'autre à l'extremité a_k de ce segment, il y existe un point d_k tel que: $f(d_k) = \frac{B_n(d_k)}{A_n(d_k)} = -1$. Si $a_k = b_k$, on obtient $d_k = a_k = b_k$. Donc, dans tous les cas, les racines $d_1, d_2, \ldots\ldots\ldots d_n$ sont réels et: $a_k \leqslant d_k \leqslant b_k$ (fig. 5); ainsi:

$$|A_n(x) + B_n(x)| = (-1)^{k-1}[A_n(x) + B_n(x)] \quad \text{quand } b_k \geqslant x \geqslant d_k$$

et $\hfill (26)$

$$|A_n(x) + B_n(x)| = (-1)^k[A_n(x) + B_n(x)] \quad \text{quand } d_k \geqslant x \geqslant a_k$$

Et tenant compte des relations (23) et (26), nous écrirons les formules (25') et (25'') comme suit:

$$v_{s,l}{}^{(k)} = -u\cos\alpha + u\sin\alpha \left| \frac{A_n(x)+B_n(x)}{2\sqrt{-A_n(x)\,.\,B_n(x)}} \right| \mp$$

$$+ u\sin\alpha \left| \frac{A_n(x)-B_n(x)}{2\left[1+\sqrt{\dfrac{A_n(x)}{A_n(x)-B_n(x)}}\right]\sqrt{-A_n(x)\,.\,B_n(x)}} \right| \quad . \; . \; . \quad (27')$$

pour: $\qquad b_k > x \geqslant d_k \qquad$ et

$$v_{s,l}{}^{(k)} = -u\cos\alpha \pm u\sin\alpha \left| \frac{A_n(x)+B_n(x)}{2\sqrt{-A_n(x)\,.\,B_n(x)}} \right| \mp$$

$$\mp u\sin\alpha \left| \frac{A_n(x)-B_n(x)}{2\left[1+\sqrt{\dfrac{A_n(x)}{A_n(x)-B_n(x)}}\right]\sqrt{-A_n(x)\,.\,B_n(x)}} \right| \quad . \quad (27'')$$

pour: $\qquad d_k \geqslant x > a_k.$

Dans ces formules les signes supérieurs se rapportent à la vitesse $v_s{}^{(k)}$ au-dessus du profil et les signes inférieurs — à la vitesse $v_l{}^{(k)}$ au-dessous du profil.

On ne peut se servir des formules trouvées que pour $b_k > x > a_k$. Pour les valeurs $x = b_k$ ou $x = a_k$ ces formules prennent la forme indéterminée. Mais on peut l'écarter en écrivant la formule (18), comme suit:

$$v_x - i\,v_y = -u\cos\alpha - i\,u\sin\alpha \frac{2\sqrt{A_n} + (A_n+B_n)\sqrt{\dfrac{1}{A_n-B_n}}}{2\left[1+\sqrt{\dfrac{A_n}{A_n-B_n}}\right]\sqrt{B_n}}, \quad (28)$$

d'où pour $z = b_k$, on obtient: $|v_x - i\,v_y|_{z=b_k} = \infty$ . . . . (29)

En posant $z = a_k$ c. à d. $A_n = 0$, on a:

$$|v_x - i\,v_y|_{z=a_k} = -u\cos\alpha - i\,u\sin\alpha \frac{B_n(a_k)\sqrt{\dfrac{1}{-B_n(a_k)}}}{2\sqrt{B_n(a_k)}}.$$

L'argument φ_3 du polynome $A_n(x) - B_n(x)$ pour $x = a_k$ c'est-à-dire l'argument de $-B_n(a_k)$ est égal à $-(k-1)\pi$ de deux côtés du profil; l'argument φ_2 de $B_n(a_k)$ est $-(k-2)\pi$ au-dessus et $-k\pi$ au-dessous du profil; ainsi les vitesses au point a_k seront réelles et égales respectivement:

$$v_s{}^{(k)}(a_k) = -u\cos\alpha + \frac{u}{2}\sin\alpha; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30')$$

$$v_l{}^{(k)}(a_k) = -u\cos\alpha - \frac{u}{2}\sin\alpha. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30'')$$

On voit immédiatement que toujours:

$$|v_s{}^{(k)}(a_k)| \leqslant |v_l{}^{(k)}(a_k)| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30''')$$

Revonons maintenant aux formules (27') et (27'') pour nous rendre compte de la variation de la vitesse le long du profil.

Envisageons d'abord les vitesses provenant du deuxième terme. Les formules en question montrent que ces vitesses ont des valeurs opposées aux points du profil, situés

des côtés différents. Toutes les deux vitesses s'annulant aux points d'abscisses d_k (fig. 5), elles ont des signes contraires à gauche et à droite de ce point.

La partie contributive de la vitesse provenant du troisième terme est négative au-dessus et positive au-dessous du profil. En tenant compte de ce terme aussi que de deux premiers, on arrive à la vitesse résultante. Il est aisé de vérifier que pour α suffisamment petit la vitesse résultante sur le profil est partout négative, excepté les points situés au voisinage du point b_k du côté inférieur du profil. Il en résulte qu'il s'effectue le décollement simple aux points $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$, où commencent les couches de discontinuité s'étendant vers l'infini. De même, les points $c_1, c_2 \ldots\ldots c_{n-1}$ donnent naissance à un autre système des discontinuités (fig. 5).

Nous ne considérons pas les formules établies comme fournissant un modèle du mouvement réel. Elles ne nous serviront dans la suite que pour le calcul des vitesses, des pressions et des forces qui agissent sur nos profils.

§ 3.

Ce qui présente pour nous le plus d'intérêt, ce sont les valeurs des forces agissant sur les profils particuliers, en premier lieu — la comparaison de ces valeurs avec celle de la force qui agit sur un seul profil rectiligne. La surface portante de ce dernier doit être, évidemment, égale à la somme de celles des profils particuliers.

Dans ce qui va suivre nous ne nous occuperons que de la force portante. Cependant, le calcul direct de cette force serait très compliqué. Quand il s'agit d'un seul profil rectiligne, on peut laisser de côté cette difficulté. En effet, dans ce cas, la force portante P_y s'exprime avec une approximation tout suffisante par la formule:

$$P_y \cong \sigma\, u\, C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

σ désignant la densité du fluide; u — la vitesse du courant à l'infini et C — la circulation autour de ce profil. Ainsi, il est permis, dans ce cas, de calculer la circulation au lieu de la force portante — ce qui est beaucoup plus simple.

En revenant à l'objet de nos recherches c. à d. aux systèmes de n profils rectilignes, nous admettons l'existence de la même relation. Nous nous bornerons donc à déterminer la circulation C_k autour de chaque profil; nous la comparerons après avec la circulation autour d'un seul profil rectiligne dont la longueur est: $l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$.

Nous rappelons que la circulation C autour d'un seul profil rectiligne (fig. 1) s'exprime par la formule:

$$C = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} v_i\, dx + \int_{\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} v_s\, dx, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

où v_i désigne la vitesse au dessous du profil, v_s — au dessus. En vertu de (12) et (13), nous obtiendrons:

$$C = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left\{ -u \cos\alpha + u \sin\alpha \frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}} + \frac{u\, l^{3/2} \sin\alpha}{2\left(l^{1/2} + \sqrt{x + \frac{l}{2}}\right)\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}} \right\} dx +$$

$$+\int_{\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \left\{ -u\cos\alpha - u\sin\alpha \frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2}} - \frac{u\, l^{3/2}\sin\alpha}{2\left(l^{1/2}+\sqrt{x+\frac{l}{2}}\right)\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2}} \right\} dx =$$

$$= 2\,u\sin\alpha \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{l}{4}-x^2}} + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{l^{3/2}\,dx}{2\left(l^{1/2}+\sqrt{x+\frac{l}{2}}\right)\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2}} \right\}.$$

La première intégrale est égale à zéro; pour obtenir la seconde, il suffit d'appliquer la substitution:

$\sqrt{x+\frac{l}{2}} = l^{1/2}\cos\varphi$; d'où: $\sqrt{\frac{l^2}{4}-x^2} = l\sin\varphi\cos\varphi$; $dx = -2l\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$; de cette façon on aura:

$$C = -\,2\,u\,l\sin\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = 2\,u\,l\sin\alpha \left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,u\,l\sin\alpha\ ^{1)}. \quad . \quad (33)$$

Quand il s'agit d'un système des profils, il faut, pour obtenir la valeur de la circulation C_k autour du k^{me} profil, remplacer dans la formule (32) v_l et v_s respectivement par $v_l^{(k)}$ et $v_s^{(k)}$:

$$C_k = \int_{a_k}^{b_k} v_l^{(k)}\,dx + \int_{b_k}^{a_k} v_s^{(k)}\,dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Écrirons ces vitesses sous une forme explicite pour le cas de deux et trois profils des longueurs égales, situés sur l'axe x d'une manière symétrique par rapport à l'origine. En désignant par l la longueur de chaque profil et par h — la distance des centres de deux profils voisins, nous obtenons, en vertu des formules (16), (17), (18), (25') et (25''), dans le cas $n = 2$ (fig. 6):

Fig. 6.

$$b_1 = \frac{h+l}{2};\quad a_1 = \frac{h-l}{2};\quad b_2 = -\frac{h-l}{2};\quad a_2 = -\frac{h+l}{2};$$

$$A_2(z) = \left(z - \frac{h-l}{2}\right)\left(z + \frac{h+l}{2}\right) = z^2 + l\,z - \frac{h^2-l^2}{4};$$

---

[1]) Les formules (31) et (33) donnent la valeur suivante de la force portante agissant sur le profil rectiligne: $P_y = \sigma\, u\, C = 2\sigma u^2 l\sin\alpha$; ce qui s'accorde très bien pour α suffisamment petit — avec l'expression obtenue à l'aide de la formule de Blasius.

Voir: C. Witoszyński — La Mécanique des Profils d'Aviation, l. c., p. 51, form. (6) et la suivante (on y a introduit la valeur numérique: $\sigma = 1/8$);

et „ — Modification du principe de circulation, l. c., p. 7.

$$B_2(z) = \left(z - \frac{h+l}{2}\right)\left(z + \frac{h-l}{2}\right) = z_2 - lz - \frac{h^2 - l^2}{4};$$

d'où:

$$v_x - i v_y = -u \cos\alpha - i u \sin\alpha \frac{z^2 - \dfrac{h^2 - l^2}{4}}{\sqrt{\left[z^2 - \left(\dfrac{h+l}{2}\right)^2\right]\left[z^2 - \left(\dfrac{h-l}{2}\right)^2\right]}} -$$

$$-i u \sin\alpha \frac{lz}{\left[1 + \sqrt{\dfrac{\left(z - \dfrac{h-l}{2}\right)\left(z + \dfrac{h+l}{2}\right)}{2lz}}\right]\sqrt{\left[z^2 - \left(\dfrac{h+l}{2}\right)^2\right]\left[z^2 - \left(\dfrac{h-l}{2}\right)^2\right]}} ; \quad (35)$$

et

$$v_{s,i}{}^{(1)} = -u \cos\alpha \mp u \sin\alpha \frac{x^2 - \dfrac{h^2 - l^2}{4}}{W} \mp$$

$$\mp u \sin\alpha \frac{lx}{\left[1 + \sqrt{\dfrac{\left(x - \dfrac{h-l}{2}\right)\left(x + \dfrac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right] W} ; \quad . \ . \ . \ (35')$$

$$v_{s,i}{}^{(2)} = -u \cos\alpha \pm u \sin\alpha \frac{x^2 - \dfrac{h^2 - l^2}{4}}{W} \pm$$

$$\pm u \sin\alpha \frac{lx}{\left[1 + \sqrt{\dfrac{\left(x - \dfrac{h-l}{2}\right)\left(x + \dfrac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right] W} ; \quad . \ . \ . \ (35'')$$

où on a posé pour abréger:

$$W = \sqrt{\left[\left(\frac{h+l}{2}\right)^2 - x^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{h-l}{2}\right)^2\right]} . \ . \ . \ . \ . \ (35''')$$

De même, dans le cas $n = 3$:

$$b_1 = h + \frac{l}{2}; \quad a_1 = h - \frac{l}{2}; \quad b_2 = \frac{l}{2}; \quad a_2 = -\frac{l}{2}; \quad b_3 = -h + \frac{l}{2}; \quad a_3 = -h - \frac{l}{2};$$

$$A_3 = \left(z - h + \frac{l}{2}\right)\left(z + \frac{l}{2}\right)\left(z + h + \frac{l}{2}\right) = z^3 + \frac{3}{2} lz^2 + \left(\frac{3}{4} l^2 - h^2\right) z + \frac{l}{2}\left(\frac{l^2}{4} - h^2\right);$$

$$B_3 = \left(z - h - \frac{l}{2}\right)\left(z - \frac{l}{2}\right)\left(z + h - \frac{l}{2}\right) = z^3 - \frac{3}{2} lz^2 + \left(\frac{3}{4} l^2 - h^2\right) z - \frac{l}{2}\left(\frac{l^2}{4} - h^2\right);$$

d'où :

$$v_x - i\,v_y = -u\cos\alpha - i\,u\sin\alpha\;\frac{z\left(z^2+\frac{3}{4}l^2-h^2\right)}{\sqrt{\left(z^2-\frac{l^2}{4}\right)\left[z^2-\left(h-\frac{l}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(h+\frac{l}{2}\right)^2\right]}} - i\,u\sin\alpha\times$$

$$\times\frac{\frac{l}{2}\left(3z^2+\frac{l^2}{4}-h^2\right)}{\left[1+\sqrt{\frac{\left(z+\frac{l}{2}\right)\left(z-h+\frac{l}{2}\right)\left(z+h+\frac{l}{2}\right)}{l\left(3z^2+\frac{l^2}{4}-h^2\right)}}\right]\sqrt{\left(z^2-\frac{l^2}{4}\right)\left[z^2-\left(h-\frac{l}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(h+\frac{l}{2}\right)^2\right]}}. \quad (36)$$

Nous nous bornons, dans ce qui suit, au cas de deux profils ayant la même longueur l (fig. 6). En vertu des formules (34), (35′), (35″) et (35‴), on trouve l'expression de la circulation autour du premier profil:

$$C_1 = 2ul\sin\alpha\left\{\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{x^2-\frac{h^2-l^2}{4}}{l\,.\,W}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{x\,dx}{\left[1+\sqrt{\frac{\left(x-\frac{h-l}{2}\right)\left(x+\frac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right]W}\right\}, \quad . \; . \; . \; . \quad (37)$$

et celle de la circulation autour du second profil:

$$C_2 = -2ul\sin\alpha\left\{\int_{-\frac{h+l}{2}}^{-\frac{h-l}{2}}\frac{x^2-\frac{h^2-l^2}{4}}{l\,.\,W}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{h+l}{2}}^{-\frac{h-l}{2}}\frac{x\,dx}{\left[1+\sqrt{\frac{\left(x-\frac{h-l}{2}\right)\left(x+\frac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right]W}\right\}. \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

On voit que C_1 et C_2 ne diffèrent que par les limites d'intégration. En remplaçant x par $(-x)$, on peut aussi obtenir C_2 sous la forme suivante:

$$C_2 = 2ul\ \sin\alpha \left\{ - \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x^3 - \frac{h^2 - l^2}{4}}{l \,.\, W}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x\,dx}{\left[1 + \sqrt{\frac{\left(x + \frac{h-l}{2}\right)\left(\frac{h+l}{2} - x\right)}{2lx}}\right] W} \right\} \ldots \quad (38')$$

Ainsi, pour trouver les valeurs de ces circulations, il suffit de calculer trois intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x^2 - \frac{h^2 - l^2}{4}}{l \,.\, W}\, dx\,; \quad J_2 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x\,dx}{\left[1 + \sqrt{\frac{\left(x - \frac{h-l}{2}\right)\left(x + \frac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right] W}\,;$$

$$J_3 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x\,dx}{\left[1 + \sqrt{\frac{\left(x + \frac{h-l}{2}\right)\left(\frac{h+l}{2} - x\right)}{2lx}}\right] W} \ldots \ldots \quad (39)$$

À l'aide de ces notations, on peut écrire les formules précédentes (37) et (38') comme suit:

$$C_1 = 2ul\ \sin\alpha\ (J_1 + J_2)\,; \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

$$C_2 = 2ul\ \sin\alpha\ (-J_1 + J_2) \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

Introduisons encore les rapports A_1 et A_2 entre les circulations C_1 soit C_2 et la circulations $2\,C$ autour d'un seul profil de la longueur double $2\,l$, c'est-à-dire les expressions:

$$A_1 = \frac{C_1}{2\,C} = \frac{1}{2}\ (J_1 + J_2) \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

$$A_2 = \frac{C_2}{2\,C} = \frac{1}{2}\ (-J_1 + J_3). \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

Il sera aussi intéressant de trouver la somme de ces rapports:

$$A = \frac{C_1 + C_2}{2\,C} = \frac{1}{2}\ (J_2 + J_3) \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

Les intégrales qui sont á calculer se ramènent aux fonctions algébriques et elliptiques.

Nous commençons par l'integrale J_1 qui peut être transformée à l'aide de la substitution suivante:

$$x = \frac{l}{2} \cos\varphi + \frac{h}{2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

d'où:

$$dx = -\frac{l}{2} \sin\varphi \, d\varphi - \frac{\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{h} \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}} d\varphi;$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{h+l}{2} + x\right)\left(x - \frac{h-l}{2}\right)\left(\frac{h+l}{2} - x\right)\left(x + \frac{h-l}{2}\right)} =$$

$$= \frac{lh}{2} \sin\varphi \left(\frac{l}{h} \cos\varphi + \sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}\right);$$

donc:

$$\frac{dx}{W} = -\frac{d\varphi}{h\sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45')$$

et

$$J_1 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x^2 - \frac{h^2 - l^2}{4}}{l \,.\, W} dx = -\frac{1}{2} \int_{\pi}^{0} \frac{\frac{l}{h} \cos^2\varphi + \cos\varphi \sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{l} \int_0^{\pi} \frac{\frac{l^2}{h^2} - 1 + 1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 0 - \frac{h^2 - l^2}{hl} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi}} + \frac{h}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{l^2}{h^2} \sin^2\varphi} \, d\varphi.$$

En introduisant les notations habituelles des intégrales de première et de seconde espèce:

$$F(\varphi_1,k) = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad [1] \quad , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

$$E(\varphi_1,k) = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \quad [1] \quad , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

on peut écrire:

$$J_1 = \frac{h}{l} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) - \frac{h^2-l^2}{hl} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) \ldots\ldots \quad (48)$$

Nous passons maintenant au calcul de l'intégrale J_2:

$$J_2 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{x\,dx}{\left[1+\sqrt{\dfrac{\left(x-\frac{h-l}{2}\right)\left(x+\frac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right] W} =$$

$$= \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx^2\left[1-\sqrt{\dfrac{\left(x-\frac{h-l}{2}\right)\left(x+\frac{h+l}{2}\right)}{2lx}}\right]}{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right) W}\, dx =$$

$$= \frac{1}{h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right) d\,\frac{4x^2-h^2-l^2}{lW} -$$

$$-\frac{1}{h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \sqrt{2lx}\; d\,\frac{2lx+h^2-l^2}{\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{lh^2} \left| \frac{x(4x^2-h^2-l^2)\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)} - l(2lx+h^2-l^2)\sqrt{2lx}}{\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}} \right|_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} -$$

---

[1] Pour les intégrales elliptiques complètes $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, on emploie aussi des notations abrégées: $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k)$ et $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k)$. Nous n'en ferons pas usage dans la suite.

$$-\frac{1}{l h^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{\left(3x^2+2lx-\frac{h^2-l^2}{2}\right)(4x^2-h^2-l^2)}{W}\,dx +$$

$$+\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx+h^2-l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{lh^2}\left\{\frac{\frac{d}{dx}\left[x(4x^2-h^2-l^2)\right]\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}-l(2lx+h^2-l^2)\sqrt{2lx}}{\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}}\right\}_{x=\frac{h+l}{2}} +$$

$$+\frac{(h-l)(h+2l)}{h^2}-\frac{2l}{h^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{x^2+\frac{h^2-l^2}{4}}{W}\,dx+\frac{4}{lh^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} d\left[(l+x)W\right] +$$

$$+\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx+h^2-l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}}\,dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

L'expression entre parenthèse $\{\ \}$ s'annule pour $x=\frac{h+l}{2}$ — ce que l'on peut vérifier aisément en effectuant la différentiation indiquée. Ensuite, en se servant de la substitution (45), nous trouverons l'intégrale:

$$\frac{2l}{h^2}\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{x^2+\frac{h^2-l^2}{4}}{W}\,dx=\frac{l}{h^2}\int\limits_0^{\pi}\frac{h^2-l^2\sin^2\varphi+lh\cos\varphi\sqrt{1-\frac{l^2}{h^2}\sin^2\varphi}}{h\sqrt{1-\frac{l^2}{h^2}\sin^2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{l}{h}\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\frac{l^2}{h^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi+\frac{l^2}{h^2}\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi=2\frac{l}{h}\,E\left(\frac{\pi}{2},\frac{l}{h}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

L'intégrale $\int\limits_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} d\left[(l+x)W\right]$ est évidemment égale à zéro, car les limites d'intégration satisfont à l'équation $W=0$. Enfin, pour calculer la dernière intégrale qui figure dans la formule (49), nous appliquerons la substitution:

$$x=\frac{h+l}{2}\cos^2\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

d'où :

$$\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{2lx+h^2-l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}}\,dx =$$

$$=\sqrt{2\frac{l}{h}}\int_0^{\varphi_1}\frac{1+\frac{l}{h}-\frac{l}{h^2}(h+l)\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\frac{l+h}{2h}\sin^2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$=\left(1-\frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{l+h}{2h}\sin^2\varphi}}+2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-\frac{l+h}{2h}\sin^2\varphi}\;d\varphi =$$

$$=\left(1-\frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\,F\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right)+2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\,E\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right). \quad . \quad (52)$$

où:

$$\varphi_1 = arc\,\sin\sqrt{\frac{2l}{h+l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Ainsi

$$J_2 = \frac{(h-l)\,(h+2l)}{h^2}-2\frac{l}{h}E\left(\frac{\pi}{2},\frac{l}{h}\right)+\left(1-\frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\,F\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right)+$$

$$+2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\,E\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Nous allons déterminer maintenant l'intégrale J_3. D'une façon analogue à précédente, nous trouverons :

$$J_3 = \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{x\,dx}{\left[1+\sqrt{\frac{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}{2lx}}\right]W} =$$

$$=\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}\frac{2lx^2\left[1-\sqrt{\frac{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)}{2lx}}\right]}{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h}{2}\right)W}\,dx =$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}}x\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)d\,\frac{4x^2-h^2-l^2}{l\,.\,W}-$$

$$-\frac{1}{h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \sqrt{2lx}\; d\, \frac{2lx - h^2 + l^2}{\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{lh^2}\left| \frac{x(4x^2 - h^3 - l^2)\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)} - l\,(2lx - h^2 + l^2)}{\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\right|_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} +$$

$$+\frac{1}{lh^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{\left(3x^2 - 2lx - \frac{h^2-l^2}{4}\right)\left(4x^2 - h^2 - l^2\right)}{W}\, dx +$$

$$+\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx - h^2 + l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\, dx = \frac{(h+l)(h-2l)}{h^2} -$$

$$-\frac{1}{lh^2}\left\{ \frac{\frac{d}{dx}\left[x(4x^2 - h^2 - l^2)\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}-x\right)\left(x+\frac{h-l}{2}\right)} - l(2lx - h^2 + l^2)\sqrt{2lx}\right]}{\frac{d}{dx}\sqrt{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\right\}_{x=\frac{h-l}{2}} +$$

$$+\frac{2l}{h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+}{2}} \frac{x^2 + \frac{h^2-l^2}{4}}{W}\, dx - \frac{4}{lh^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} d\,[(x-l)\;W\,] +$$

$$+\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx - h^2 + l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\, dx. \;\ldots\; (55)$$

Ici: $\{\quad\}_{x=\frac{h-l}{2}} = 0$; quant à la première intégrale qui figure dans cette formule, elle est déjà determinée [form. (50)]. Ensuite: $\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} d\,[(x-l)\;W] = 0$. Ainsi, il ne reste qu'une intégrale à calculer. Nous la transformerons préalablement de la manière suivante:

$$\frac{\sqrt{2l}}{2h^2}\int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2lx - h^2 + l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\, dx =$$

$$= \frac{2\,l\,\sqrt{2l}}{h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} d\sqrt{\frac{\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}{x}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2l}}{2\,h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{h^2 - l^2 + l\,\frac{h^2-l^2}{2\,x}}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\,d\,x =$$

$$= 4\,\frac{l^2}{h^2} - \frac{(h^2-l^2)\,\sqrt{2\,l}}{2\,h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{1+\frac{l}{2x}}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\,d\,x. \qquad (56)$$

En appliquant maintenant la substitution

$$x = \frac{h-l}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (57)$$

nous trouverons:

$$\frac{\sqrt{2\,l}}{2\,h^2} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h+l}{2}} \frac{2\,l\,x - h^2 + l^2}{\sqrt{x\left(\frac{h+l}{2}+x\right)\left(x-\frac{h-l}{2}\right)}}\,d\,x =$$

$$= 4\,\frac{l^2}{h^2} - \frac{(h^2-l^2)\,\sqrt{2\,l}}{h^2} \int_0^{\varphi_1} \frac{1+\frac{l}{h-l}\cos^2\varphi}{\sqrt{h\left(1-\frac{h+l}{2\,h}\sin^2\varphi\right)}}\,d\varphi =$$

$$= 4\,\frac{l^2}{h^2} - 2\,\frac{l}{h}\sqrt{2\,\frac{l}{2}} \int_0^{\varphi_1} \frac{\frac{h}{2l}+\frac{1}{2}-\frac{h+l}{2\,h}\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\frac{h+l}{2\,h}\sin^2\varphi}}\,d\varphi = 4\,\frac{l^2}{h^2} -$$

$$-\left(1-\frac{l}{h}\right)\sqrt{2\,\frac{l}{h}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{h+l}{2h}\sin^2\varphi}} - 2\,\frac{l}{h}\sqrt{2\,\frac{l}{h}} \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1-\frac{h+l}{2\,h}\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4\,\frac{l^2}{h^2} - \left(1-\frac{l}{h}\right)\sqrt{2\,\frac{l}{h}}\;F\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{h+l}{2\,h}}\right) - 2\,\frac{l}{h}\sqrt{2\,\frac{l}{h}}\;E\left(\varphi_1,\sqrt{\frac{h+l}{2\,h}}\right) \qquad (58)$$

ou comme précédemment: $\varphi_1 = arc \sin \sqrt{\dfrac{2l}{h+l}}$.

De cette façon on a:

$$J_3 = \frac{(h+l)(h-2l)}{h^2} + 2\frac{l}{h} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) + 4\frac{l^2}{h^2} - \left(1 - \frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\, F\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{h+l}{2h}}\right) -$$

$$-2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\, E\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{h+l}{2h}}\right) = \frac{h^2 - lh + 2l^2}{h^2} + 2\frac{l}{h} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) -$$

$$-2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\, E\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{h+l}{2h}}\right) - \left(1 - \frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\, F\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{h+l}{2h}}\right). \quad (59)$$

En introduisant maintenant les expressions obtenues pour J_1, J_2 et J_3 dans les formules (42) et (43), on obtient:

$$\lambda_1 = \frac{C_1}{2C} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{l}{h} - 2\frac{l^2}{h^2} + \frac{h}{l}\left(1 - 2\frac{l^2}{h^2}\right) E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) - \frac{h}{l}\left(1 - \frac{l^2}{h^2}\right) F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\, E\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{h+l}{2h}}\right) + \left(1 - \frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\, F\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right)\right\}. \quad (60)$$

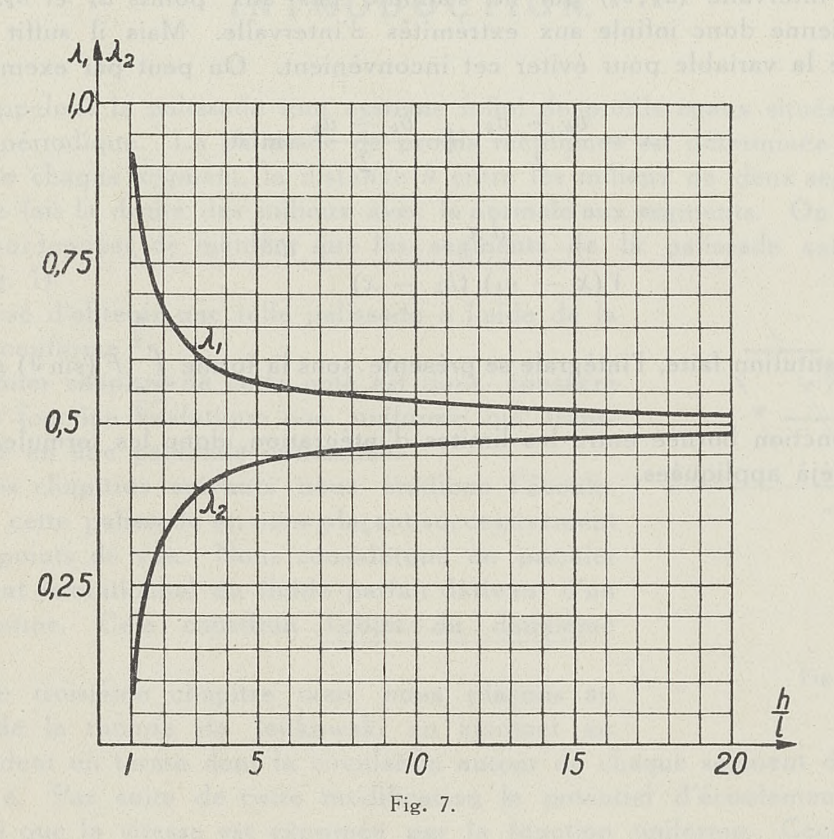


Fig. 7.

$$\lambda_2 = \frac{C_2}{2C} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{l}{h} + 2\frac{l^2}{h^2} - \frac{h}{l}\left(1 - 2\frac{l^2}{h^2}\right) E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) + \frac{h}{l}\left(1 - \frac{l^2}{h^2}\right) F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{l}{h}\right) - \right.$$

$$\left. - 2\frac{l}{h}\sqrt{2\frac{l}{h}}\, E\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right) - \left(1 - \frac{l}{h}\right)\sqrt{2\frac{l}{h}}\, F\left(\varphi_1, \sqrt{\frac{l+h}{2h}}\right)\right\}. \quad (61)$$

On a tracé sur la fig. 7 l'allure de ces quantités en fonction du rapport $\frac{h}{l}$. Ce diagramme nous montre que le premier profil a en général une portance plus grande que le second et ceci est autant plus accentué qu'ils sont plus approchés.

Ensuite, en comparant les formules (60) et (61), on voit que, indépendamment de la valeur du rapport $\frac{h}{l}$ c'est-à-dire de la distance des profils, il est toujours:

$$\lambda = \frac{C_1 + C_2}{2C} = \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Ainsi, un biplan à tandem doit avoir la même portance qu'un monoplan, tous les deux ayant la même surface portante.

Quand il s'agit du calcul de circulations autour de nos profils dans le cas où $n \geqslant 3$ on est conduit aux intégrales hyperelliptiques qui ne se réduisent pas en général aux fonctions $F(\varphi, k)$ et $E(\varphi, k)$. Dans tous ces cas on peut effectuer le calcul numérique des intégrales en question en employant la méthode connue de Simpson. Mais ce procédé exige que la fonction à intégrer soit bornée entre les limites d'intégration. Cependant, tous ces intégrales ont la forme $\int_{a_k}^{b_k} \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{-A_n(x) \,.\, B_n(x)}}$, où $G(x)$ désigne une fonction bornée dans l'intervalle (a_k, b_k) qui ne s'annule pas aux points a_k et b_k. La fonction à intégrer devienne donc infinie aux extrémités d'intervalle. Mais il suffit d'effectuer le changement de la variable pour éviter cet inconvénient. On peut par exemple poser

$$x = \frac{b_k + a_k}{2} + \frac{b_k - a_k}{2} \sin\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

alors

$$\frac{dx}{\sqrt{(x - a_k)(b_k - x)}} = d\vartheta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

La substitution faite, l'intégrale se présente sous la forme $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\sin\vartheta)\, d\vartheta$, où $F(\sin\vartheta)$ désigne une fonction bornée entre les limites d'intégration, donc les formules de Simpson peuvent être déjà appliquées.

PIOTR SZYMAŃSKI, dr. phil.

ÉCOULEMENT PLAN DU FLUIDE À TRAVERS UNE PALISSADE DE SEGMENTS RECTILIGNES.

INTRODUCTION.

Nous appelons la palissade tout système infini de profils égaux situés dans le plan d'une manière périodique. La palissade de profils rectilignes est déterminée lorsqu'on sait la longueur l de chaque segment, la distance h entre les milieux de deux segments voisins et l'angle β que fait la droite des milieux avec la normale aux segments. On peut disposer les axes des coordonnées de manière que les segments de la palissade soient parallèles à l'axe x. (Fig. 1).

Il est aisé d'obtenir une telle palissade à l'aide de la représentation conforme.

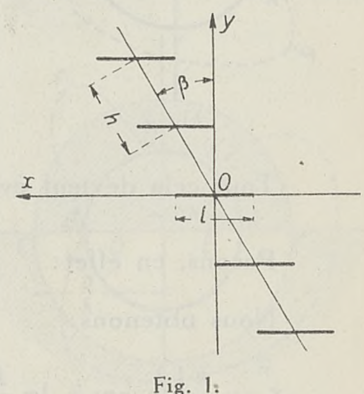


Fig. 1.

Le premier chapitre de cette note est donc consacré à l'étude d'une fonction analytique non uniforme qui transforme un cercle en une palissade demandée.

Dans les chapitres suivants nous étudions l'écoulement à travers cette palissade en nous plaçant successivement aux différents points de vue. Nous considérons en premier lieu l'écoulement irrotationnel du fluide parfait dérivant d'un potentiel uniforme. Cela constitue l'objet du deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre nous nous plaçons au point de vue de la théorie de Joukowski en ajoutant au potentiel précédent un terme dont la circulation autour de chaque segment de la palissade est non nulle. Par suite de cette modification le potentiel d'écoulement devient non uniforme tandis que la vitesse est exprimée par la fonction uniforme. Ceci constitue le point essentiel de la théorie de Joukowski.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un écoulement basé sur la théorie de prof. Witoszyński. Dans cette théorie le potentiel d'écoulement ainsi que la vitesse doivent être exprimés par les fonctions non uniformes. Grâce aux valeurs multiples de la vitesse on est conduit à éliminer des régions déterminées du plan par les coupures. Ces régions s'appellent les „couches de discontinuité".

Nous obtenons le potentiel d'un tel écoulement en ajoutant au potentiel uniforme considéré dans le premier chapitre un terme supplémentaire convenablement choisi.

Le but de notre travail est de calculer les forces agissant sur les profils de la palissade et de comparer les résultats obtenus par ces méthodes.

Il faut remarquer que la partie du problème se rattachant au principe de Joukowski a été déjá résolue par M. Koenig*) au moyen d'une méthode différente.

CHAPITRE I.

Soient $Z = X + iY$ et $z = x + iy$ deux variables complexes. Nous transformons le cercle $|Z| = a$ en une palissade de segments rectilignes située dans le plan de la variable z à l'aide de la fonction:

$$z = \frac{h}{2\pi}\left[e^{i\beta} \lg \frac{Z + ak}{Z - ak} + e^{-i\beta} \lg \frac{a + kZ}{a - kZ}\right];\ 0 \leqslant k \leqslant 1 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

C'est la fonction non uniforme admettant quatre points critiques logarithmiques: $ak,\ -ak,\ \frac{a}{k}$ et $-\frac{a}{k}$.

Si la variable Z décrit un chemin quelconque ne faisant aucun circuit autour de points critiques, z varie d'une manière continue et reprend sa valeur initiale lorsque Z revient au point de départ. Au contraire, si Z décrit un chemin fermé renfermant des points critiques, la valeur initiale et la valeur finale de Z ne se confondent pas en général.

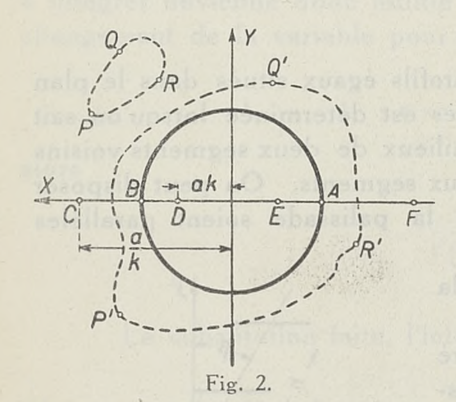


Fig. 2.

Nous ne considérerons dans la suite que les chemins situés au dehors du cercle $|Z| = a$, c.-à-d. les chemins tels que $PQRP$ ou $P'Q'R'P'$ (Fig. 2). Cette convention faite, le premier terme de la fonction (1) devient uniforme. En effet, tout chemin fermé parcourant au dehors du cercle $|Z| = a$ contient tous les deux points critiques ak et $-ak$ ou n'en contient aucun. Dans tous les cas l'accroissement du premier terme de l'expression (1) le long de ce chemin est nul.

Tout cela devient évident, si l'on sépare la partie réelle et la partie imaginaire de (1).

Posons, en effet: $Z = re^{i\vartheta}$.

Nous obtenons:

$$x = \frac{h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos\beta \lg \frac{k^2r^2 + 2akr\cos\vartheta + a^2}{k^2r^2 - 2akr\cos\vartheta + a^2}\cdot\frac{r^2 + 2akr\cos\vartheta + a^2k^2}{r^2 - 2akr\cos\vartheta + a^2k^2} + \right.$$

$$\left. + \sin\beta\left(arctg\frac{2akr\sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2} + arctg\frac{2akr\sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$y = \frac{h}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\beta \lg \frac{k^2r^2 + 2akr\cos\vartheta + a^2}{k^2r^2 - 2akr\cos\vartheta + a^2}\cdot\frac{r^2 - 2akr\cos\vartheta + a^2k^2}{r^2 + 2akr\cos\vartheta + a^2k^2} + \right.$$

*) E. König. Potentialströmung durch Gitter. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Berlin 1922, B. 2, s. 422.

$$+ \cos\beta \left(- arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2} + arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2} \right) \Bigg] . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Désignons, en général, par $Arctg\ t$ la valeur principale de $arctg\ t$ c.-à-d. la valeur comprise dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Attribuons à la fonction $arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2}$ la valeur 0 pour $r = a$ et $\vartheta = 0$; alors:

$$arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2} = Arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2}$$

pour tous les points du plan de Z situés au dehors du cercle $|Z| = a$.

En effet, pour $r > a$ l'expression:

$$\frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2}$$

est toujours finie et continue, donc les fonctions $Arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2}$ et $arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2k^2}$ coïncident.

Au contraire, la valeur de la fonction $arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ au point quelconque du plan situé au dehors du cercle $|Z| = a$ dépend du chemin parcouru par ce point. Cela résulte du raisonnement suivant.

L'expression $\frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ devient infinie sur la circonférence du cercle $|Z| = \frac{a}{k}$, en changeant le signe lorsque Z traverse cette circonférence. Appelons „région positive" la portion du plan où l'expression $\frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ est positive, et de la même manière définissons „région négative". (Sur la Fig. 3 la région positive est couverte des hachures).

Supposons maintenant que Z varie le long du chemin qui coupe la circonférence $|Z| = \frac{a}{k}$, en allant de la région positive à la région négative du plan.

Au point de rencontre la valeur de $Arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ fait un saut de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ tandis que $arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ varie d'une manière continue. Ainsi

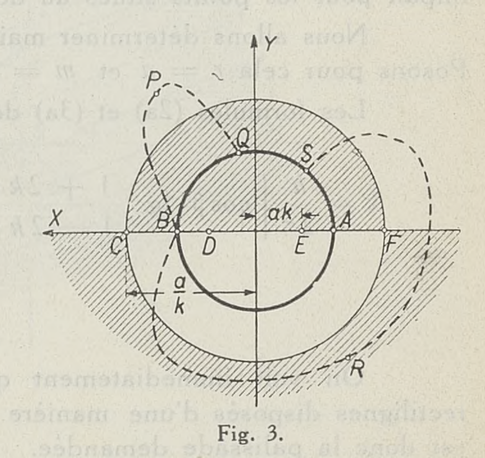


Fig. 3.

la différence $Arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2} - arctg \frac{2akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2r^2}$ obtient l'accroissement $-\pi$ chaque fois que Z traverse la circonférence $|Z| = \frac{a}{k}$ en passant de la région positive à la région négative du plan de Z. Attribuons à tout passage par ladite circonférence le signe $+$ ou $-$ suivant le cas, si ce passage s'effectue de la région négative à la région positive ou bien dans le sens inverse.

On peut écrire alors:

$$arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2 r^2} = Arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2 r^2} + m\pi$$

où m désigne le nombre de rencontres de la circonférence $|Z| = \frac{a}{k}$ prises avec le signe convenable.

Ainsi pour le chemin BPQ (Fig. 3) $m = 0$, tandis que pour le chemin BRS $m = 2$.

Les formules (2) et (3) peuvent s'écrire maintenant:

$$x = \frac{h}{2\pi}\Bigg[\frac{1}{2}\cos\beta \lg \frac{k^2 r^2 + 2\,akr \cos\vartheta + a^2}{k^2 r^2 - 2\,akr \cos\vartheta + a^2} \cdot \frac{r^2 + 2\,akr \cos\vartheta + a^2 k^2}{r^2 - 2\,akr \cos\vartheta + a^2 k^2} +$$

$$+ \sin\beta \left(Arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2 k^2} + Arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2 r^2}\right) + m\pi \sin\beta\Bigg] \quad . \;.\;. \quad (2a)$$

$$y = \frac{h}{2\pi}\Bigg[\frac{1}{2}\sin\beta \lg \frac{k^2 r^2 + 2\,akr \cos\vartheta + a^2}{k^2 r^2 - 2\,akr \cos\vartheta + a^2} \cdot \frac{r^2 - 2\,akr \cos\vartheta + a^2 k^2}{r^2 + 2\,akr \cos\vartheta + a^2 k^2} -$$

$$- \cos\beta \left(Arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{r^2 - a^2 k^2} - Arctg \frac{2\,akr \sin\vartheta}{a^2 - k^2 r^2}\right) + m\pi \cos\beta\Bigg] \quad . \;.\;. \quad (3a)$$

où m désigne, comme plus haut, le nombre d'intersections du chemin allant du point initial B au point Z avec la circonférence $|Z| = \frac{a}{k}$.

Ce nombre est pair pour tout point Z situé à l'intérieur du cercle $|Z| = \frac{a}{k}$ et impair pour les points situés au dehors de ce cercle.

Nous allons déterminer maintenant les profils qui correspondent au cercle $|Z| = a$. Posons pour cela $r = a$ et $m = 2n$; n est un nombre entier, puisque m est pair.

Les formules (2a) et (3a) donnent:

$$x = \frac{h}{2\pi}\left[\cos\beta \lg \frac{1 + 2k \cos\vartheta + k^2}{1 - 2k \cos\vartheta + k^2} + 2 \sin\beta \, Arctg \frac{2k \sin\vartheta}{1 - k^2}\right] + nh \sin\beta. \qquad (4)$$

$$y = nh \cos\beta. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (5)$$

On voit immédiatement que ces formules représentent un système de segments rectilignes disposés d'une manière périodique, le période étant égal à $ihe^{-i\beta}$. Ce système est donc la palissade demandée.

Considérons un segment quelconque de la palissade, p. ex. celui qui correspond à la valeur $n = 0$.

Les équations, qui déterminent ce segment, seront:

$$x = \frac{h}{2\pi}\left[\cos\beta \lg \frac{1 + 2k \cos\vartheta + k^2}{1 - 2k \cos\vartheta + k^2} + 2 \sin\beta \, Arctg \frac{2k \sin\vartheta}{1 - k^2}\right] \quad . \;.\;. \quad (4_0)$$

$$y = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (5_0)$$

Calculons la longuer l de ce segment. En différentiant (4_0) par rapport à ϑ et en égalant la dérivée à zéro, on détermine les valeurs de ϑ correspondant aux extremités du segment par la condition:

$$tg\,\vartheta = \frac{1-k^2}{1+k^2}\,tg\,\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (6)$$

ce sont les valeurs ϑ_0 et $\pi + \vartheta_0$, où:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{(1-k^2)\sin\beta}{R}; \qquad \cos\vartheta_0 = \frac{(1+k^2)\cos\beta}{R} \quad . \; . \; . \qquad (7),\ (8)$$

$$R = \sqrt{1 + 2k^2\cos 2\beta + k^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (9)$$

En substituant $\vartheta = \vartheta_0$ et $\vartheta = \pi + \vartheta_0$ dans la formule (4_0), on obtient les abscisses $x_{1,0}$ et $x_{2,0}$ des extremités du segment en question:

$$x_{1,0} = \frac{h}{\pi}\left[\cos\beta\ \lg\ \frac{R+2k\cos\beta}{1-k^2} + \sin\beta\ Arctg\ \frac{2k\sin\beta}{R}\right] \quad . \; . \; . \qquad (10_1)$$

$$x_{2,0} = \frac{h}{\pi}\left[\cos\beta\ \lg\ \frac{1-k^2}{R+2k\cos\beta} - \sin\beta\ Arctg\ \frac{2k\sin\beta}{R}\right] \quad . \; . \; . \qquad (10_2)$$

d'où la longueur du segment:

$$l = \frac{2h}{\pi}\left[\cos\beta\ \lg\ \frac{R+2k\cos\beta}{1-k^2} + \sin\beta\ Arctg\ \frac{2k\sin\beta}{R}\right] \quad . \; . \; . \qquad (11)$$

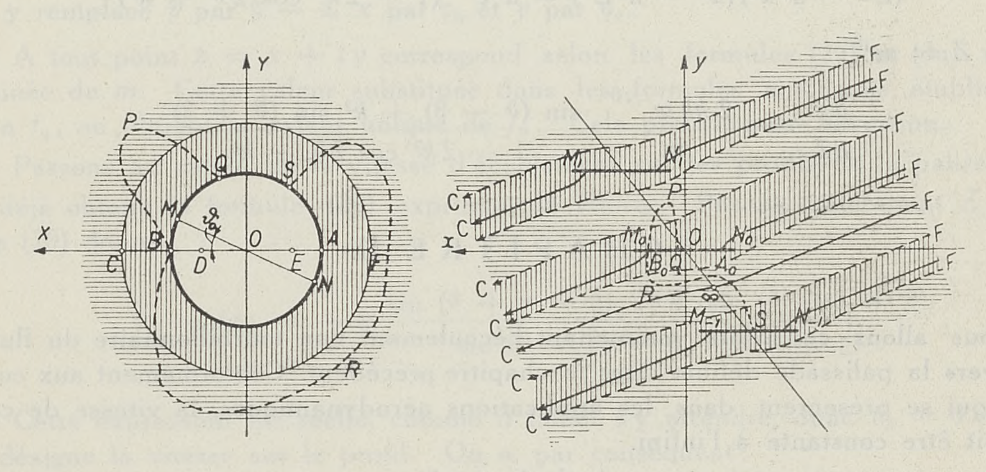


Fig. 4.

La palissade est ainsi complètement déterminée.

Ajoutons encore quelques remarques qui se rattachent à la représentation du plan de Z tout entier.

Ainsi, aux points $Z = \frac{a}{k}$ et $Z = -\frac{a}{k}$ correspond dans le plan de z le point à l'infini. Donc, l'image du cercle $|Z| = \frac{a}{k}$ se décompose en deux parties répetées une infinité de fois conformément à l'infinité de valeurs prises par le nombre m dans les formules (2) et (3). Ce système de courbes détermine dans le plan de z une infinité de régions dont chacune ne contient qu'un segment de la palissade.

La fig. 4 met en évidence les régions correspondantes de deux plans. Un coup d'oeil sur la figure permet de comprendre tous les détails de la correspondance en question. On voit p. ex. que le chemin tel que BRS dans le plan de Z fait passer z d'un segment de la palissade à un autre. Au contraire, en faisant varier Z le long du chemin tel que BPQ, on revient au même segment.

Nous laissons de côté l'étude approfondie de ladite correspondance, en nous bornant aux indications déjà faites.

Avant de terminer ce chapitre, nous citerons encore quelques formules dont nous ferons usage dans les chapitres suivants.

En différentiant la fonction (1) par rapport à Z, on obtient:

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{akh}{\pi}\left[\frac{e^{-i\beta}}{a^2 - k^2 Z^2} - \frac{e^{i\beta}}{Z^2 - a^2 k^2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

A l'aide de (7), (8) et (9), la formule se transforme en:

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{akh}{\pi} \cdot \frac{Re^{-i\vartheta_0}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})}{(Z^2 - a^2k^2)(a^2 - k^2Z^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Pour $Z = ae^{i\vartheta}$ on a:

$$Re^{-i\vartheta_0}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0}) = 2a^2 ie^{i\vartheta}[\sin(\vartheta - \beta) + k^2 \sin(\vartheta + \beta)] \quad \ldots \quad (14)$$

et:

$$(Z^2 - a^2 k^2)(a^2 - k^2 Z^2) = a^4 e^{2i\vartheta}(1 - 2k^2 \cos 2\vartheta + k^4) \quad \ldots \quad (15)$$

donc pour $Z = ae^{i\vartheta}$:

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{2\,khie^{-i\vartheta}}{a\pi} \cdot \frac{\sin(\vartheta - \beta) + k^2 \sin(\vartheta + \beta)}{1 - 2k^2 \cos 2\vartheta + k^4} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

CHAPITRE II.

Nous allons construire maintenant l'écoulement non tourbillonnaire du fluide parfait à travers la palissade définie dans le chapitre précédent. Conformément aux conditions spéciales qui se présentent dans les applications aérodynamiques, la vitesse de cet écoulement doit être constante à l'infini.

Nous supposons cette vitesse égale à $-ue^{i\alpha}$.

L'écoulement le plus simple correspondant à la valeur $\alpha = 0$ dérive d'un potentiel uniforme $-uz$. Ce potentiel exprimé en termes de la variable Z peut s'écrire:

$$-\frac{uh}{2\pi}\left[e^{i\beta}\lg\frac{Z + ak}{Z - ak} + e^{-i\beta}\lg\frac{a + kZ}{a - kZ}\right].$$

Le généralisation immédiate de cette expression nous conduit au potentiel cherché sous la forme:

$$f_0 = \varphi_0 + i\psi_0 = \frac{uh}{2\pi}\left[e^{i(\beta-\alpha)}\lg\frac{Z - ak}{Z + ak} + e^{-i(\beta-\alpha)}\lg\frac{a - kZ}{a + kZ}\right] \quad \ldots \quad (17)$$

En effet, désignons par v_x et v_y les composantes de la vitesse de l'écoulement défini par le potentiel (17). On a, en géneral:

$$v_x - i v_y = \frac{df_0}{dz} = \frac{df_0}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

Mais:

$$\frac{df_0}{dZ} = \frac{akuh}{\pi}\left[\frac{e^{i(\beta-\alpha)}}{Z^2 - a^2 k^2} - \frac{e^{-i(\beta-\alpha)}}{a^2 - k^2 Z^2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

d'où — à l'aide de la formule (12):

$$v_x - i v_y = u \frac{e^{i(\beta-\alpha)}(a^2 - k^2 Z^2) - e^{-i(\beta-\alpha)}(Z^2 - a^2 k^2)}{e^{-i\beta}(Z^2 - a^2 k^2) - e^{i\beta}(a^2 - k^2 Z^2)} \quad \ldots (20)$$

Au point à l'infini du plan de z correspondent les valeurs $Z = \frac{a}{k}$ et $Z = -\frac{a}{k}$.
En substituant ces valeurs dans la formule (20), on obtient:

$$[v_x - i v_y]_{z=\infty} = - u e^{i\alpha}$$

ce qui s'accorde avec la condition posée.

Le potentiel (17) a une forme complètement analogue à celle de la fonction de transformation (1). Grâce à cette circonstance il est uniforme dans le plan de z bien qu'il se présente comme une fonction non uniforme de la variable Z. En effet, tous les raisonnements du chapitre précédent se transmettent immédiatement sur la fonction (17).

En particulier, les valeurs multiples de f_0 s'expriment par les formules (2a) et (3a) si l'on y remplace β par $\beta - \alpha$, x par φ_0 et y par ψ_0.

A tout point $z = x + iy$ correspond selon les formules (2a) et (3a) une valeur déterminée de m. Cette valeur substituée dans les formules analogues établies pour la fonction f_0, on obtient la valeur unique de f_0. Cela prouve notre assertion.

Passons au calcul de la vitesse d'écoulement sur les profils de la palissade. Nous avons déjà obtenu la formule (20) exprimant la vitesse. Posons maintenant $Z = ae^{i\vartheta}$; la formule (20) donne:

$$v_x - i v_y = - u \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta)}{\sin(\vartheta - \beta) + k^2 \sin(\vartheta + \beta)} \quad \ldots (21)$$

Cette expression est réelle, comme il fallait s'y attendre; donc $v_y = 0$ et $v_p = v_x$, où v_p désigne la vitesse sur le profil. On a, par conséquent:

$$v_p = - u \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta)}{\sin(\vartheta - \beta) + k^2 \sin(\vartheta + \beta)} \quad \ldots (22)$$

Le numérateur de cette expression s'annule pour les valeurs $\vartheta = \vartheta_1$ et $\vartheta = \pi + \vartheta_1$, où ϑ_1 est l'angle aigu déterminé par la condition:

$$\sin(\vartheta_1 + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta_1 - \alpha + \beta) = 0$$

ou:

$$tg\, \vartheta_1 = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\, tg\, (\beta - \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

Posons:

$$R_1 = \sqrt{1 + 2k^2 \cos 2(\beta - \alpha) + k^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

alors:

$$\sin \vartheta_1 = \frac{1 - k^2}{R_1} \sin(\beta - \alpha); \qquad \cos \vartheta_1 = \frac{1 + k^2}{R_1} \cos(\beta - \alpha). \qquad (25), (26)$$

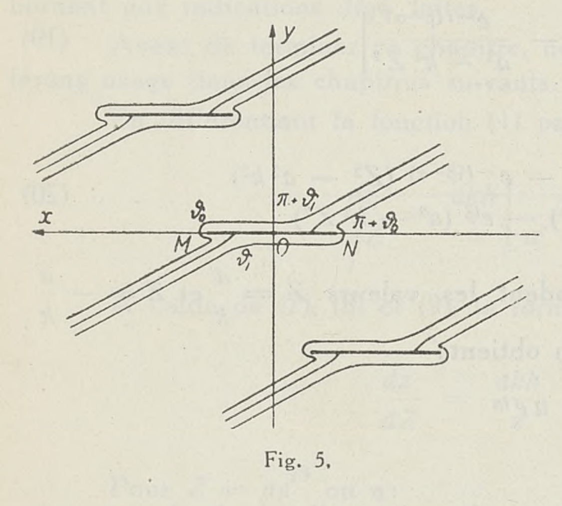


Fig. 5.

En comparant (6) et (23), on a: $\vartheta_1 < \vartheta_0$, d'où il résulte que la répartition des vitesses sur le profil donné par (22) est analogue à celle qui s'obtient pour un seul profil rectiligne (Fig. 5). On le vérifiera par la détermination du signe de l'expression (22), ou mieux — de l'expression (28a).

En terminant ce chapitre, nous transformerons les formules (19) et (20) à l'aide de (24), (25) et (26).

Par ces transformations nous mettrons en évidence les zéros des fonctions $\frac{df_0}{dZ}$ et $v_x - iv_y$, ainsi que les valeurs de Z, où la vitesse d'écoulement devient infinie. Nous obtiendrons:

$$\frac{df_0}{dZ} = -\frac{akuh}{\pi} \cdot \frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1})}{(Z^2 - a^2k^2)(a^2 - k^2Z^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

puis, en tenant compte de (13) et (18):

$$v_x - i v_y = -u \frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}}{R_0 e^{-i\vartheta_0}} \cdot \frac{Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}}{Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Il est utile de remarquer encore que pour $Z = ae^{i\vartheta}$:

$$R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}) = 2a^2 i e^{i\vartheta} [\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta)]. \quad (29)$$

et

$$v_x - iv_y = v_p = -u \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28a)$$

CHAPITRE III.

Nous avons considéré dans le chapitre précédent un écoulement dérivant d'un potentiel uniforme. La résultante des pressions sur le profil de la palissade provenant de ce potentiel est nulle.

En nous plaçant au point de vue de la théorie de Joukowski nous construirons dans ce chapitre un potentiel non uniforme qui donne des forces agissant sur les profils.

Nous obtenons ce potentiel en ajoutant au potentiel uniforme f_0 consideré auparavant un terme non uniforme convenablement choisi. Le potentiel ainsi formé s'écrira:

$$f_1 = \frac{uh}{2\pi}\left[e^{i(\beta-\alpha)} \lg \frac{Z - ak}{Z + ak} + e^{-i(\beta-\alpha)} \lg \frac{a - kZ}{a + kZ} - 2Kik \lg \frac{Z^2 - a^2k^2}{a^2 - k^2Z^2}\right] \quad (30)$$

Le coefficient K sera déterminé de la manière que la vitesse d'écoulement soit finie au point de fuite du profil c.—á—d. à son extremité d'arrière. Cela conduit à la condition:

$$\left.\frac{df_1}{dZ}\right|_{z\,=\,ae^{i(\pi+\vartheta_0)}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Mais:

$$\frac{df_1}{dZ} = -\frac{akuh}{\pi} \cdot \frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}) + 2\,aK\,(1 - k^4)\,iZ}{(Z^2 - a^2k^2)\,(a^2 - k^2Z^2)} \quad . \; . \; . \quad (32)$$

d'où, à l'aide des formules (29), et (15), on obtient pour $Z = ae^{i\vartheta}$:

$$\frac{df_1}{dZ} = -\frac{2\,i\,kuh}{\pi e^{i\vartheta}} \cdot \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta) + K\,(1 - k^4)}{1 - 2k^2 \cos 2\vartheta + k^4} \quad . \quad (33)$$

et, en égalant à zéro, après avoir posé $\vartheta = \pi + \vartheta_0$:

$$K = \frac{\sin(\vartheta_0 + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta_0 - \alpha + \beta)}{1 - k^4}$$

ou en vertu de (7) et (8):

$$K = \frac{\sin\alpha}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Le potentiel (30) s'écrira maintenant:

$$f_1 = \frac{uh}{2\pi}\left[e^{i(\beta-\alpha)} \lg \frac{Z - ak}{Z + ak} + e^{-i(\beta-\alpha)} \lg \frac{a - kZ}{a + kZ} - \frac{2k\,i\,\sin\alpha}{R} \lg \frac{Z^2 - a^2k^2}{a^2 - k^2Z^2}\right]. \quad (35)$$

Calculons la vitesse d'écoulement; nous avons, en vertu de (32) et (13):

$$v_x - i\,v_y = -u\,\frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}) + 2\,aK\,(1 - k^4)\,Z\,i}{Re^{-i\vartheta_0}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})} \quad . \; . \; . \quad (36)$$

En particulier, pour $Z = \pm\dfrac{a}{k}$ c.-à-d. pour z infini on obtient:

$$\left. v_x - i\,v_y \right|_{\infty} = -u\left[e^{i\alpha} \pm \frac{2\,ikK}{R}\,\frac{e^{i\vartheta_0}}{1 - k^2 e^{2i\vartheta_0}}\right]$$

ou, en se basant sur (7), (8) et (34):

$$\left. v_x - i\,v_y \right|_{\infty} = -u\left[e^{i\alpha} \pm \frac{2\,ik\,\sin\alpha}{R}\,e^{i\beta}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (37)$$

La discussion simple permet de choisir, comme il suit, les signes correspondant aux valeurs de la vitesse à $\pm\infty$.

$$\left. v_x - i\,v_y \right|_{+\infty} = -u\left(e^{i\alpha} + \frac{2\,ik\,\sin\alpha}{R}\,e^{i\beta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37a)$$

$$v_x - i v_y \Big|_{-\infty} = - u \left(e^{i\alpha} - \frac{2ik \sin \alpha}{R} e^{i\beta} \right) \quad \ldots\ldots \quad (37b)$$

Ainsi, nous sommes conduits à l'hypothèse que la vitesse de particules du fluide change quand elles passent par la palissade, ce changement s'étendant jusqu'à l'infini.

Dans la plupart des applications de notre théorie, p. ex. dans la théorie de l'hélice, on considère le fluide comme immobile à l'amont de la palissade à une grande distance de celle-ci, la palissade étant animée d'un mouvement de translation uniforme. A ce point de vue le mouvement considéré dans notre travail est le mouvement relatif du fluide par rapport à la palissade. Il en résulte que la vitesse de translation de la palissade, que nous désignerons par $u_1 e^{i\alpha_1}$, doit être égale à $- \left| v_x - i v_y \right|_{+\infty}$.

Posons donc:

$$u_1 e^{i\alpha_1} = u \left(e^{i\alpha} + \frac{2ik \sin \alpha}{R} e^{i\beta} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Nous obtenons:

$$tg\,\alpha_1 = \frac{tg\,\alpha + \dfrac{2k \cos\beta}{R} tg\,\alpha}{1 - \dfrac{2k \sin\beta}{R} tg\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

et:

$$u_1^2 = u^2 \left[1 + \frac{4k \sin\alpha}{R} \sin(\alpha - \beta) + \frac{4k^2 \sin^2\alpha}{R^2} \right] \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

En résolvant la première de ces équations par rapport à $tg\,\alpha$ on obtient:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1 + \dfrac{2k}{R}\cos(\alpha_1 - \beta)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

en substituant ensuite dans (40), on détermine u:

$$u = \frac{u_1 \sqrt{R^2 + 4kR \cos\alpha_1 \cos(\alpha_1 - \beta) + 4k^2 \cos^2(\alpha_1 - \beta)}}{R + 2k\cos\beta} \quad \ldots \quad (42)$$

Les formules (41) et (42) nous permettent de calculer les paramètres u et α pour chaque valeur donnée de $u_1 e^{i\alpha_1}$.

Nous allons déterminer maintenant la résultante des pressions agissant sur le profil quelconque de la palissade. Soient P_x et P_y les composantes de cette force suivant les axes des coordonnées, en adoptant la direction négative de l'axe X comme le sens positif de P_x.

La formule connue de Blasius donne:

$$P_y - iP_x = - \frac{\sigma}{2} \int \left(\frac{df_1}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} dZ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

où l'intégration s'effectue dans le plan de Z le long de la circonférence du cercle primitif $|Z| = a$; σ désigne la densité de l'air.

En substituant les valeurs de $\frac{df_1}{dZ}$ et $\frac{dZ}{dz}$ tirées des formules (32) et (13), on obtient:

$$P_y - i P_x = - \frac{\sigma a k u^2 h}{2 \pi R e^{-i\vartheta_0}} \int \frac{[R_1 e^{-i\vartheta_1} (Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}) + 2aK(1-k^4) i Z]^2}{(Z^2 - a^2 k^2)(a^2 - k^2 Z^2)(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})} dZ \quad (44)$$

Dans cette intégrale la fonction à intégrer admet deux pôles $Z = a e^{i\vartheta_0}$ et $Z = a e^{i(\pi + \vartheta_0)}$ situés sur la circonférence $|Z| = a$, c.-à-d. sur le chemin d'intégration. Mais cela ne nous arrêtera pas dans le calcul. En effet, ce sont les profils avec une seule pointe d'arrière dont on s'occupe dans les applications pratiques. En ayant égard à ces applications nous considérerons les segments de la palissade comme les profils de ce genre extrêmement minces.

Cela revient à remplacer le chemin d'intégration $|Z| = a$ par une circonférence $|Z| = a + \varepsilon$ où ε est le nombre positif tres petit. Ce nouveau chemin d'intégration contient dans son intérieur quatre pôles de la fonction à intégrer, à savoir: $Z = ak$, $Z = -ak$, $Z = a e^{i\vartheta_0}$ et $Z = -a e^{i\vartheta_0}$. L'intégration se réduit maintenant au calcul des résidus correspondant à ces pôles.

On simplifiera le calcul en remarquant que la fonction à intégrer peut être mise sous la forme d'une somme de deux termes, dont un ne renferme que des carrés de la variable Z. Le résidu provenant de ce terme est évidemment nul; il ne reste donc qu' à déterminer le résidu du deuxième terme de cette somme. On aura:

$$P_y - i P_x = - \frac{2 \sigma a^2 k u^2 h (1 - k^4) K i R_1 e^{-i\vartheta_1}}{R e^{-i\vartheta_0}} \int \frac{(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1}) Z dZ}{(Z^2 - a^2 k^2)(a^2 - k^2 Z^2)(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})} \quad (45)$$

En évaluant cette intégrale par la méthode des résidus, on obtient:

$$P_y - i P_x = \frac{4 \sigma k u^2 h K R_1}{R(1 - 2k^2 \cos 2\vartheta_0 + k^4)} [(1+k^4)\cos(\vartheta_0 - \vartheta_1) - 2k^2 \cos(\vartheta_0 + \vartheta_1) + i(1-k^4)\sin(\vartheta_0 - \vartheta_1)] \quad (46)$$

ou, en séparant la partie réelle et imaginaire:

$$P_y = \frac{4 \sigma K k u^2 h R_1}{R(1 - 2k^2 \cos 2\vartheta_0 + k^4)} [(1 + k^4)\cos(\vartheta_0 - \vartheta_1) - 2k^2 \cos(\vartheta_0 + \vartheta_1)] \quad . \quad (47)$$

et:

$$P_x = - \frac{4 \sigma K k u^2 h R_1 \sin(\vartheta_0 - \vartheta_1)(1 - k^4)}{R(1 - 2k^2 \cos 2\vartheta_0 + k^4)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

En éliminant les paramètres auxiliaires ϑ_0, ϑ_1 et K à l'aide des formules (7), (8), (9), (24), (25), (26), et (34), on met P_y et P_x sous la forme:

$$P_y = \frac{4\sigma k u^2 h \sin\alpha \cos\alpha}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

$$P_x = -\frac{4\sigma k u^2 h \sin^2\alpha}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

En introduisant enfin au lieu de u et α les paramètres u_1 et α_1 servant à représenter la vitesse à l'infini, on obtient (voir 41 et 42):

$$P_y = \frac{4\sigma k u_1^2 h \sin\alpha_1}{(R+2k\cos\beta)^2}\left[R\cos\alpha_1 + 2k\cos(\alpha_1-\beta)\right] \quad . \quad . \quad (51)$$

$$P_x = -\frac{4\sigma k u_1^2 h R \sin^2\alpha_1}{(R+2k\cos\beta)^2} \quad . \quad . \quad (52)$$

Selon les formules (51) et (52) la résultante des pressions est donnée par ses composantes suivant les axes des coordonnées. Mais, il est plus commode de décomposer cette force suivant la direction de la vitesse à l'infini et la direction normale à cette dernière.

Désignons ces nouvelles composantes de la pression résultante par P_{x1} (force portante) et P_{y1} (résistance à l'avancement).

On aura:

$$P_{y1} = P_y \cos\alpha_1 - P_x \sin\alpha_1$$

$$P_{x1} = P_y \sin\alpha_1 + P_x \cos\alpha_1$$

donc:

$$P_{y1} = \frac{4\sigma k u_1^2 h \sin\alpha_1}{(R+2k\cos\beta)^2}\left[R + 2k\cos\alpha_1\cos(\alpha_1-\beta)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$P_{x1} = \frac{8\sigma k^2 u_1^2 h \sin^2\alpha_1 \cos(\alpha_1-\beta)}{(R+2k\cos\beta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (54)$$

Comparons nos résultats avec la valeur de la force P'_{y1} correspondant à un seul profil rectiligne se trouvant dans les mêmes conditions.

D'après Joukowski on a:

$$P'_{y1} = \pi\sigma u_1^2 l \sin\alpha_1$$

Introduisons le rapport:

$$\lambda = \frac{P_{y1}}{P'_{y1}}$$

alors:

$$\lambda = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{h}{l}\cdot\frac{R + 2k\cos\alpha_1\cos(\alpha_1-\beta)}{(R+2k\cos\beta)^2}$$

CHAPITRE IV.

Les considérations du chapitre précédent sont basées sur l'hypothèse, qu'à une certaine distance du profil, d'ailleurs très petite, l'écoulement réel du fluide visqueux peut être considéré comme potentiel et le fluide même comme le fluide parfait. Suivant cette hypothèse la région, où le mouvement n'est pas potentiel, se présente sous la forme d'une couche d'épaisseur très petite embrassant le profil. On l'appelle la couche superficielle.

La couche superficielle est intimement liée avec le profil et participe dans son mouvement par rapport au fluide, elle peut, donc, être considérée comme la partie intégrale du profil. Le mouvement réel du fluide visqueux autour d'un profil est, ainsi, remplacé par un mouvement potentiel du fluide parfait autour d'un autre profil composé du profil donné et de sa couche superficielle. Ce qui est essentiel dans cette théorie, c'est que le nouveau profil ne diffère pas pratiquement du profil donné, grâce à l'épaisseur négligeable de la couche superficielle.

Mais l'expérience montre [1]) que la couche superficielle, très mince dans la partie antérieure du profil, subit un décollement dans la partie arrière. Nous constatons dans le mouvement réel du fluide l'existence d'une couche tourbillonnaire qui se produit, en général, au voisinage du bord de fuite et s'étend à une distance considérable du profil.

On distingue deux espèces du décollement [2]): le décollement simple qui se produit en un seul point du profil, et le décollement double se produisant aux deux points différents du profil.

L'idée fondamentale du prof. Witoszynški est de construire le potentiel complexe représentant le mouvement du fluide réel au dehors de la couche tourbillonnaire; dans la région occupée par la couche le potentiel ne serait pas défini.

Le raisonnement analogue s'applique encore s'il s'agit de l'écoulement autour d'un système fini de profils ou de la palissade infinie, mais toujours dans le cas du décollement simple.

Ainsi, la théorie du prof. Witoszynski remplace les couches tourbillonnaires par les régions du plan de la variable complexe exclues du champ de vitesses à l'aide des coupures convenablement choisies. Ces régions sont alors dites les couches de discontinuité. Les deux coupures limitant une quelconque de ces couches de discontinuité commencent en un point du profil correspondant et s'étendent jusqu' à l'infini, n'ayant au dehors du profil aucun point d'intersection. D'ailleurs, toutes ces coupures doivent être des lignes de courant.

Pour construire le potentiel de ce genre représentant un écoulement autour d'un système de profils, on se sert des fonctions analytiques à dérivée non uniforme. Considérons, en effet, une fonction analytique $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ déterminée dans tout le plan, dont la partie imaginaire $\psi(x, y)$ est constante pour chaque profil du système et dont la dérivée $f'(z)$ est non uniforme autour d'un profil quelconque P du système.

Nous laissons de côté autres conditions auxquelles doit satisfaire cette fonction. La dernière condition, imposée sur la dérivée $f'(z)$, implique, évidemment, que cette dérivée admet des points critiques sur le profil P ou dans son intérieur.

Grâce aux valeurs multiples de la fonction $f'(z)$, elle ne peut représenter aucun champ de vitesses déterminé dans tout le plan de z Mais, si l'on choisit une détermination quelconque $\underline{f'(z)}$ de la fonction $f'(z)$, cette détermination sera uniforme dans chaque

---

[1]) Voir p. ex. L. Prandtl. Ueber Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleinen Reibung. Verh. d. II Intern. Math. Kongress Heidelberg 1904. Leipzig u. Berlin 1905 p. 484, ou: N. Joukovski. Aérodynamique. Paris 1916.

[2]) C. Witoszynski. La mécanique des profils d'aviation. Paris 1924. p. 27.

région du plan n'entourant aucun point critique de $f'(z)$, et, par conséquent, déterminera dans cette région un champ de vitesses.

Supposons maintenant qu'il existe une région R telle que:

1) La détermination $\overline{f'(z)}$ de $f'(z)$ définit dans la région R un champ de vitesses V_1.

2) La région R contient une ligne de courant L_1 appartenant au champ V_1 et issue d'un point A du profil P. (Fig. 6).

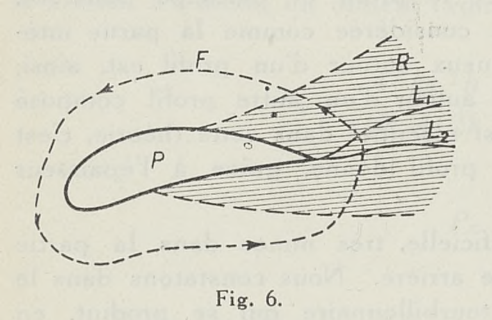


Fig. 6.

En prolongeant analytiquement la fonction $\overline{f'(z)}$ le long du chemin fermé F entourant le profil P on revient au point de départ avec une autre détermination $\overline{\overline{f'(z)}}$ de la fonction $f'(z)$. Cette fonction $\overline{\overline{f'(z)}}$ définit dans la région R le champ de vitesses V_2 différent du champ initial V_1. Il existe, en général, dans le champ de vitesses V_2, ou dans le champ obtenu de V_2 par le prolongement analytique, une ligne de courant L_2 issue du point A.

Il peut arriver que les lignes L_1 et L_2 satisfassent aux conditions suivantes:

1. L_1 et L_2 tendent vers l'infini,
2. L_1 et L_2 n'ont pas des points d'intersection au dehors du profil P,
3. L_2 précède L_1 sur le chemin F suivi dans le sens du prolongment,
4. L_1 et L_2 ne rencontrent qu'un seul profil du système, c.-à-d. le profil P.

Alors la région du plan située au dehors de P et limitée par les lignes L_1 et L_2 peut servir comme une couche de discontinuité correspondant au profil P.

En opérant de la même manière sur les autres profils du système, on obtient une famille de couches de discontinuité, chaque issue d'un profil du système et s'étendant jusqu'à l'infini.

Le raisonnement précédent est loin d'être complet ou tant plus précis. C'est un essai d'exposer les points essentiels d'une méthode générale qui n'a pas été appliquée jusqu'à présent qu'à des cas concrets. Une grande partie des notions, dont on aurait besoin pour justifier cette méthode, n'est pas encore précisée. Aussi, les limites dans lesquelles la méthode est applicable sont loins d'être formulées. Les problèmes qui s'y rattachent sont, dans la plupart, non résolus, même dans les cas concrets, quelquefois très simples. Donc, chaque fois quand on applique cette méthode, on se borne, d'habitude, au calcul des forces en laissant de côté l'examen théorique. La confiance aux résultats de ces calculs est toujours basée sur la comparaison aux données de l'expérience [1]).

En suivant la méthode développée, nous allons construire dans la suite un potentiel d'écoulement à travers la palissade définie dans le I chap. de cette note. Mais, avant d'aborder cette construction, nous ferons encore une remarque.

Le potentiel en question, ainsi que tous les potentiels de même genre, que nous avons eu l'occasion de rencontrer, donne naissance aussi à une autre famille de couches de discontinuité. Les couches de discontinuité appartenant à cette seconde famille commencent aux points critiques de la fonction $f'(z)$ situés au dehors des profils du système. Dans le cas considéré de la palissade infinie ces points critiques sont disposés sur l'axe de la palissade, tout intervalle de cet axe possédant un seul de ces points.

---

[1]) Cf. C. Witoszynski. La mécanique des profils d'aviation, déjà citée, p. 43, ou S. Neumark. Sur les formes diverses du potentiel servant à calculer les forces qui agissent sur les profils d'aviation. Travaux de l'Inst. Aérodyn. de Varsovie. 1927. Fasc. I. p. 72. ou, enfin, J. Bonder et P. Szymański. Sur le multiplan en tandem, ce volume.

Nous ne savons pas, s'il existe dans le mouvement réel les couches tourbillonnaires qui correspondraient aux couches de discontinuité de ce genre, en défaut des expériences nécessaires. Mais, ceci importe peu dans notre travail.

En effet, le but que nous nous avons proposé est d'obtenir le moyen à calculer les forces qui agissent sur les profils de la palissade. Nos efforts sont dirigés à ce que les résultats des calculs en question s'accordent avec les données de l'expérience.

Néanmoins, si l'existence du phénomène mentionné pourrait être mise en évidence par l'expérience, ce serait un argument puissant au profit de la théorie en question.

Ces remarques faites, nous passons à la construction même du potentiel.

Soit $f(z)$ une fonction analytique, dont la dérivée est donnée par les formules [1]):

$$\frac{df}{dZ} = -\frac{akuh}{\pi}\left[\frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1})}{(Z^2 - a^2 k^2)(a^2 - k^2 Z^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4i\,A}{(Z + ak)(a + kZ)\left(\sqrt{\frac{Z}{a}}\,e^{\frac{-i\vartheta_0}{2}} + \sqrt{\frac{a}{Z}}\,e^{\frac{i\vartheta_0}{2}} + 2\right)}\right] \quad \ldots \quad (55)$$

$$z = \frac{h}{2\pi}\left[e^{i\beta}\lg\frac{Z + ak}{Z - ak} + e^{-i\beta}\lg\frac{a + kZ}{a - kZ}\right]; \quad 0 \leqslant k \leqslant 1 \quad \ldots \quad (1)$$

La fonction $f'(z)$ est la somme de deux termes, dont le premier est la dérivée du potentiel considéré dans le chapitre II. Comme nous y avons déjà remarqué, c'est une fonction uniforme dans tout le plan de z.

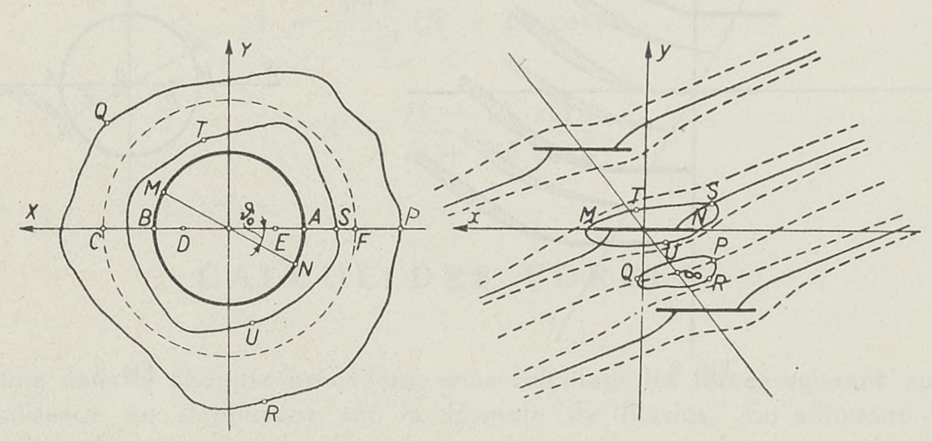


Fig. 7.

Quant au deuxième terme de cette somme, il admet les points critiques $Z = 0$ et $Z = \infty$ par rapport à la variable Z. Calculons les valeurs de z correspondant à ces points du plan de Z. Comme la fonction (1) n'est définie qu'en dehors du cercle $|Z| = a$, aucune valeur de z ne correspond au point $Z = 0$ situé à l'intérieur de ce cercle; il nous reste, donc, à examiner le point $Z = \infty$.

---

[1]) Nous conservons ici les notations des chapitres précédents. Le coefficient A sera déterminé dans la suite d'après la condition analogue à celle du chapitre III.

Les formules (2 a) et (3 a) donnent pour $r = \infty$:

$$x = \frac{mh}{2} \sin\beta; \quad y = \frac{mh}{2} \cos\beta; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Donc, au point $Z = \infty$ correspond la suite infinie des points:

$$z = \frac{mh}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{m i h}{2} e^{-i\beta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Tous ces points sont les points critiques de la fonction $f'(z)$ dans le plan de z. En effet, le chemin fermé PQR entourant un de ces points (Fig. 7) correspond dans le plan de Z au chemin fermé $P'Q'R'$ entourant le point critique $Z = 0$.

Il existe aussi des points critiques situés sur les segments de la palissade, puisqu'au chemin fermé tel que STU correspond dans le plan de Z le chemin $S'T'U'$ entourant le point $Z = 0$.

Il est évident que outre ces points la fonction $f'(z)$ ne possède plus des points critiques. Donc, conformément aux principes de la théorie exposée plus haut, il faut construire deux familles de couches de discontinuité. Les couches de la première famille commencent aux points de fuite des profils, tandis que les couches constituant la deuxième naissent aux points de la suite (56). (Fig. 8).

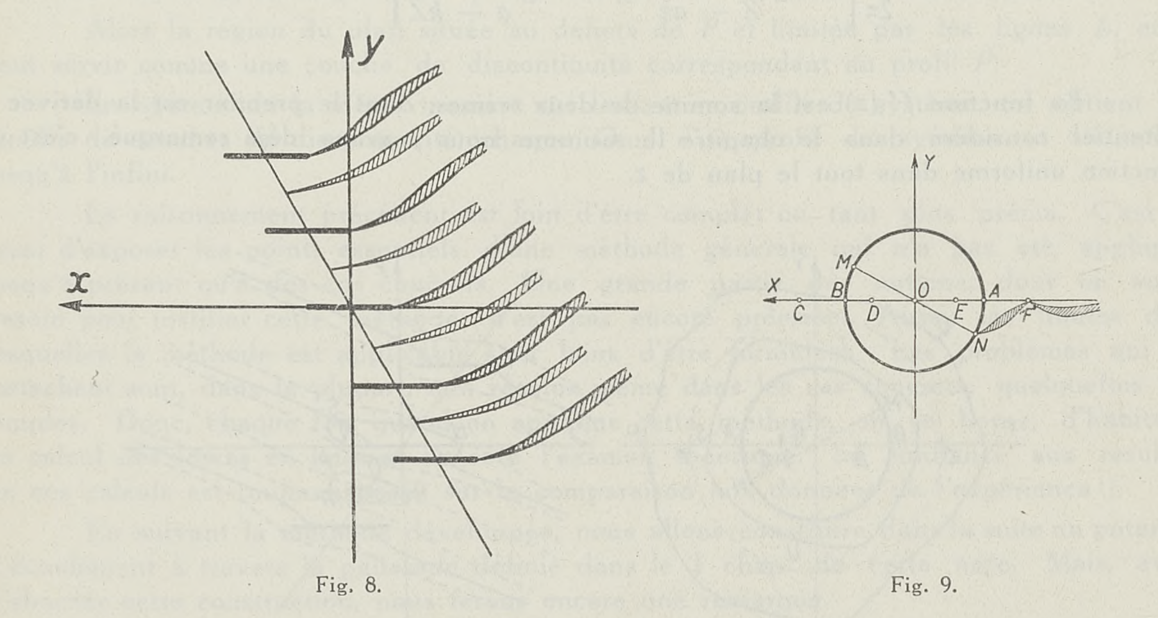


Fig. 8. Fig. 9.

Pour obtenir ces deux systèmes de couches de discontinuité il suffit de mener quatre coupures dans le plan de Z: deux allant du point N au point F, et deux issues du point F vers l'infini. (Fig. 9)[1]).

Toutes ces coupures introduites, la fonction $f'(z)$ devient uniforme au dehors des couches de discontinuité obtenues. Il en résulte que cette fonction déterminera un champ de vitesses au dehors de couches de discontinuité.

---

[1]) Le lecteur qui voudrait pousser l'analyse jusqu'aux détails consultera la note déjà citée: Sur le multiplan en tandem, ce vol., où se trouve la solution d'un problème analogue concernant le système fini de profils rectilignes disposés en tandem.

Nous allons vérifier maintenant que ce champ représente un écoulement à travers notre palissade. Pour cela il suffit démontrer que la valeur de $\frac{df}{dZ} ie^{i\vartheta}$ est réelle pour $Z = ae^{i\vartheta}$.

On a, en effet, pour $Z = ae^{i\vartheta}$:

$$\frac{df}{dZ} ie^{i\vartheta} = \frac{2kuh}{a\pi} \left[\frac{\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta)}{1 - 2k^2 \cos 2\vartheta + k^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{(1 + 2k \cos\vartheta + k^2)\left(1 + \cos\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\right)} \right]$$

ce qui est réel pour A réel.

Mais on détermine A par la condition:

$$\left[\frac{df}{dZ}\right]_{\vartheta = \pi + \vartheta_0} = 0$$

qui donne pour A la valeur réelle:

$$A = \frac{\sin(\vartheta_0 + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta_0 - \alpha + \beta)}{1 + 2k \cos\vartheta_0 + k^2} \quad \text{. . . . . . . (57)}$$

c. q. f. d.

En substituant dans cette formule les valeurs de $\sin\vartheta_0$ et $\cos\vartheta_0$, tirées de (7) et (8), on parvient aux expressions suivantes:

$$A = \frac{\sin\alpha}{1-k^2}(R - 2k\cos\beta); \quad \text{. . . . . (58)}$$

ou:

$$A = \frac{(1 - k^2)\sin\alpha}{R + 2k\cos\beta} \quad \text{. . . . . (58a)}$$

CALCUL DES FORCES.

Comme dans le chapitre précédent, nous calculons les forces agissant sur les profils de la palissade en s'appuyant sur la formule de Blasius. En adoptant les mêmes notations, nous aurons, comme auparavant:

$$P_y - iP_x = -\frac{\sigma}{2}\int \left(\frac{df}{dZ}\right)^2 \frac{dZ}{dz}\, dZ \quad \text{. . . . . (59)}$$

mais, cette fois, le chemin d'intégration sera défini d'une manière différente.

En effet, la circonférence $|Z| = a$, ainsi que tout chemin fermé embrassant cette circonférence, rencontre les coupures tracées dans le plan de Z. Donc, le chemin d'intégration du chapitre précédent doit être modifié conformément à cette nouvelle circonstance. D'ailleurs, cette modification doit être justifiée aussi par des raisons physiques.

Tout cela nous conduit au chemin d'integration définie de la manière suivante.

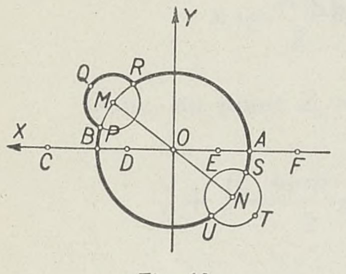


Fig. 10.

On décrit de points $Z = ae^{i\vartheta_0}$ et $Z = ae^{i(\pi+\vartheta_0)}$ comme centres deux circonférences PQR et STU de rayon ρ suffisamment petit (Fig. 10), puis on intégre le long du chemin $UBPQRAS$ formé par des arcs des cercles UBP, PQR et RAS, en faisant tendre, ensuite, le nombre ρ vers zéro.

Pour abréger l'écriture nous désignons notre chemin d'intégration par $\mathfrak{C}$, le chemin composé des arcs RAS et UBP par $\mathfrak{C}_0$ et l'arc PQR par $\mathfrak{C}_1$.

En substituant dans (59) les valeurs de $\frac{df}{dZ}$ et $\frac{dZ}{dz}$ tirées des formules (55) et (13), on obtient:

$$P_y - iP_x = -\frac{\sigma aku^2h}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}}\left[\frac{R_1 e^{-i\vartheta_1}(Z^2 - a^2e^{2i\vartheta_1})}{(Z^2-a^2k^2)(a^2-k^2Z^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\,iA}{(Z+ak)(a+kZ)\left[\sqrt{\frac{Z}{a}}\,e^{-\frac{i\vartheta_0}{2}} + \sqrt{\frac{a}{Z}}\,e^{\frac{i\vartheta_0}{2}} + 2\right]}\right]^2 \frac{(Z^2-a^2k^2)(a^2-k^2Z^2)}{Re^{-i\vartheta_0}(Z^2-a^2e^{2i\vartheta_0})}\,dZ \quad (60)$$

ou:

$$P_y - iP_x = \int_{\mathfrak{C}} F(Z)\,dZ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

si nous désignons par $F(Z)$ la fonction à intégrer.

En developpant le carré de la fonction $\frac{df}{dZ}$, on obtient:

$$F(Z) = F_1(Z) + F_2(Z) + F_3(Z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

Puisque le chemin $\mathfrak{C}$ est composé de $\mathfrak{C}_0$ et $\mathfrak{C}_1$, on a:

$$P_y - iP_x = \int_{\mathfrak{C}_1} F(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F(Z)\,dZ$$

La première de ces intégrales est égale au demi-résidu de la fonction $F(Z)$ par rapport au point $Z = ae^{i\vartheta_0}$ multiplié par $2\pi i$, ce qui peut être déterminé immédiatement. Nous passons, donc, au calcul de la seconde intégrale.

On a d'abord:

$$\int_{\mathfrak{C}_0} F(Z)\,dZ = \int_{\mathfrak{C}_0} F_1(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F_2(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F_3(Z)\,dZ$$

Comme la fonction $F_1(Z)$ ne dépend que de Z^2 et le chemin $\mathfrak{C}_0$ est composé de deux arcs RAS et UBP, symétriques par rapport à l'origine, on a:

$$\int_{RAS} F_1(Z)\,dZ = -\int_{UBP} F_1(Z)\,dZ$$

d'où:

$$\int_{RAS} F_1(Z)\,dZ + \int_{UBP} F_1(Z)\,dZ = \int_{\mathfrak{C}_0} F_1(Z)\,dZ = 0$$

par conséquent:

$$\int_{\mathfrak{C}_0} F(Z)\,dZ = \int_{\mathfrak{C}_0} F_2(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F_3(Z)\,dZ$$

et:

$$P_y - i\,P_x = \pi i \Big[(Z - ae^{i\vartheta_0})\,F(Z) \Big]_{Z = ae^{i\vartheta_0}} + \int_{\mathfrak{C}_0} F_2(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F_3(Z)\,dZ. \quad (63)$$

Mais:

$$\pi i \Big[(Z - ae^{i\vartheta_0})\,F(Z) \Big]_{Z = ae^{i\vartheta_0}} = \frac{i\sigma k u^2 h}{4} \left[\frac{2R_1 \sin(\vartheta_0 - \vartheta_1)}{1 - 2k^2 \cos 2\vartheta_0 + k^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{A}{1 + 2k \cos\vartheta_0 + k^2} \right]^2 (1 - 2k^2 \cos 2\vartheta_0 + k^4)$$

ou, en substituant la valeur de A tirée de la formule (58a) et les valeurs de $\sin\vartheta_0$ et $\cos\vartheta_0$:

$$\pi i \Big[(Z - ae^{i\vartheta_0})\,F(Z) \Big]_{Z = ae^{i\vartheta_0}} = \frac{i\sigma k u^2 h \sin^2\alpha}{R} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R - 2k\cos\beta}{R + 2k\cos\beta} \right]^2$$

Il est aisé de voir que les deux dernières intégrales de la formule (63) sont réelles; d'autre part, le demi-résidu déterminé est imaginaire, donc:

$$P_x = -\frac{\sigma k u^2 h \sin^2\alpha}{R} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R - 2k\cos\beta}{R + 2k\cos\beta} \right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

et:

$$P_y = \int_{\mathfrak{C}_0} F_2(Z)\,dZ + \int_{\mathfrak{C}_0} F_3(Z)\,dZ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

ou, en substituant au lieu de $F_2(Z)$ et $F_3(Z)$ leurs expressions:

$$P_y = -\frac{4i\sigma a k u^2 h\, A R_1\, e^{-i\vartheta_1}}{\pi R e^{-i\vartheta_0}} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_1})\,dZ}{(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})(Z + ak)(a + kZ)\left(\sqrt{\frac{Z}{a}}\, e^{-\frac{i\vartheta_0}{2}} + \sqrt{\frac{a}{Z}}\, e^{\frac{i\vartheta_0}{2}} + 2 \right)} +$$

$$+ \frac{8\sigma a k u^2 h\, A^2}{\pi R e^{-i\vartheta_0}} \int_{\mathfrak{C}_0} \frac{(Z - ak)(a - kZ)}{(Z + ak)(a + kZ)} \cdot \frac{dZ}{(Z^2 - a^2 e^{2i\vartheta_0})\left(\sqrt{\frac{Z}{a}}\, e^{-\frac{i\vartheta_0}{2}} + \sqrt{\frac{a}{Z}}\, e^{\frac{i\vartheta_0}{2}} + 2 \right)} \quad (66)$$

En posant $Z = ae^{i\vartheta}$, conformément à la définition du chemin $\mathfrak{C}_0$, et en faisant tendre, ensuite, ρ vers zéro, on obtient, (14), (29):

$$P_y = \frac{2\sigma A k u^2 h}{\pi} \int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \beta) + k^2 \sin(\vartheta - \alpha + \beta)}{\sin(\vartheta - \beta) + k^2 \sin(\vartheta + \beta)} \cdot \frac{d\vartheta}{\left(1 + \cos\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\right)(1 + 2k\cos\vartheta + k^2)} +$$

$$+\frac{\sigma A^2ku^2h}{\pi}\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{1-2k\cos\vartheta+k^2}{1+2k\cos\vartheta+k^2}\cdot\frac{d\vartheta}{\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)^2[\sin(\vartheta-\beta)+k^2\sin(\vartheta+\beta)]}\,. \quad (67)$$

Posons:

$$J_1=\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{\sin(\vartheta+\alpha-\beta)+k^2\sin(\vartheta-\alpha+\beta)}{\sin(\vartheta-\beta)+k^2\sin(\vartheta+\beta)}\cdot\frac{d\vartheta}{\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)(1+2k\cos\vartheta+k^2)} \quad (68)$$

et:

$$J_2=\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{1-2k\cos\vartheta+k^2}{1+2k\cos\vartheta+k^2}\cdot\frac{d\vartheta}{\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)^2[\sin(\vartheta-\beta)+k^2\sin(\vartheta+\beta)]}\,. \quad (69)$$

Alors:

$$P_y=\frac{\sigma ku^2h}{\pi}(2AJ_1+A^2J_2)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Le calcul précis de ces intégrales conduit aux formules compliquées, nous nous contenterons donc de leurs valeurs approchées. Nous nous bornerons dans la suite aux termes de rang de $\sin\alpha$. Il en résulte que l'intégrale J_2 peut être négligée, puisque A^2 est de rang de $\sin^2\alpha$. Quant à l'intégrale J_1, on la décompose de la manière suivante:

$$J_1=\cos\alpha\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{(1+2k\cos\vartheta+k^2)\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)}+$$

$$+\sin\alpha\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{\cos(\vartheta-\beta)-k^2\cos(\vartheta+\beta)}{\sin(\vartheta-\beta)+k^2\sin(\vartheta+\beta)}\cdot\frac{d\vartheta}{\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)(1+2k\cos\vartheta+k^2)}$$

Il est aisé de voir que la seconde intégrale de cette somme peut être négligée en vertu des formules (59) et (70), donc:

$$P_y\simeq\frac{4\sigma ku^2h\,A\,\cos\alpha}{\pi}\cdot J,\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

où:

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{(1+2k\cos\vartheta+k^2)\left(1+\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)}\quad\ldots\ldots \quad (72)$$

Calculons l'intégrale J. Posons: $\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2}=\varphi$

alors:

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + 2k \cos(2\varphi + \vartheta_0) + k^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

La fonction à intégrer peut être décomposée de la manière suivante:

$$\frac{1}{1 + 2k \cos(2\varphi + \vartheta_0) + k^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos\varphi} = E + \frac{M + N \sin\varphi}{1 + \cos\varphi} + \frac{P + Q\cos\varphi + \delta \sin\varphi + T \cos 2\varphi}{1 + 2k \cos(2\varphi + \vartheta_0) + k^2}$$

ou:

$$\frac{1}{1 + 2k \cos(2\varphi + \vartheta_0) + k^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos\varphi} = E + \frac{M + N \sin\varphi}{1 + \cos\varphi} +$$

$$+ \frac{P - T + Q \cos\varphi + S \sin\varphi + 2T \cos^2\varphi}{\mu + \nu \cos^2\varphi + \lambda \sin\varphi \cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

si l'on pose:

$$\mu = 1 - 2k \cos\vartheta_0 + k^2 \quad \ldots\ldots \quad (75a)$$

$$\nu = 4k \cos\vartheta_0 \quad \ldots\ldots \quad (75b)$$

$$\lambda = -4k \sin\vartheta_0 \quad \ldots\ldots \quad (75c)$$

En chassant les dénominateurs et en égalant les coefficients, on obtient le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} P - T + \mu(E + M) = 1 \\ P - T + Q + E\mu + \lambda N = 0 \\ S + \mu N = 0 \\ 2T + Q + \nu(E + M) = 0 \\ S + \lambda(E + M) = 0 \\ 2T + E\nu - \lambda N = 0 \\ E\lambda + \nu N = 0 \end{array} \right. \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

En résolvant ces équations par rapport aux coefficients indéterminés E, M, N, P, Q, S, T, on obtient:

$$E = -\frac{\nu}{(\mu + \nu)^2}; \qquad M = \frac{1}{\mu + \nu}; \qquad N = \frac{\lambda}{(\mu + \nu)^2}$$

$$P = \frac{\lambda^2 + 4\mu\nu + 3\nu^2}{2(\mu + \nu)^2}; \qquad Q = -\frac{\lambda^2 + \mu\nu + \nu^2}{(\mu + \nu)^2}$$

$$S = -\frac{\lambda\mu}{(\mu + \nu)^2}; \qquad T = \frac{\lambda^2 + \nu^2}{2(\mu + \nu)^2}$$

ou, en substituant les valeurs de μ, ν et λ des formules (75):

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{8k\,[(1+k^2)\cos\vartheta_0 + k]}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2} \\ Q &= -\frac{4k\,[(1+k^2)\cos\vartheta_0 + 2k\,(1+\sin^2\vartheta_0)]}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2} \\ S &= \frac{4k\sin\vartheta_0\,(1-2k\cos\vartheta_0+k^2)}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2} \\ T &= \frac{8k^2}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}; \qquad E = -\frac{4k\cos\vartheta_0}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2} \\ M &= \frac{1}{1+2k\cos\vartheta_0+k^2}; \qquad N = -\frac{4k\sin\vartheta_0}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2} \end{aligned}\right. \quad . \; . \; (77)$$

On a maintenant:

$$J = E\pi + M\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} + N\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} + \frac{1}{2}L$$

où:

$$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{P + Q\cos\varphi + S\sin\varphi + T\cos 2\varphi}{1+2k\cos(2\varphi+\vartheta_0)+k^2}\,d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; (78)$$

Mais:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\cos\varphi} = tg\,\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2$$

et:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\cos\varphi} = 0$$

d'où:

$$J = E\pi + 2M + \frac{1}{2}L \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Nous nous occuperons maintenant de l'intégrale L. Nous reviendrons d'abord à l'ancienne variable ϑ à l'aide de la formule:

$$\vartheta = 2\varphi + \vartheta_0$$

Après cette transformation l'intégrale L s'écrira:

$$L = \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{P + Q\cos\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2} + S\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2} + T\cos(\vartheta-\vartheta_0)}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2}\, d\vartheta$$

ou:

$$L = \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\dfrac{T\cos\vartheta_0}{2k}(2k\cos\vartheta + 1 + k^2) + P - \dfrac{T\cos\vartheta_0\,(1+k^2)}{2k}}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2}\, d\vartheta +$$

$$+ T\sin\vartheta_0 \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1 + 2k\cos\vartheta_0 + k^2} + \left(Q\cos\frac{\vartheta_0}{2} - S\sin\frac{\vartheta_0}{2}\right) \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\cos\dfrac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2} +$$

$$+ \left(Q\sin\frac{\vartheta_0}{2} + S\cos\frac{\vartheta_0}{2}\right) \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\dfrac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2}$$

Mais:

$$1 + 2k\cos\vartheta + k^2 = (1+k)^2 - 4k\sin^2\frac{\vartheta}{2} = (1-k)^2 + 4k\cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

donc:

$$L = \frac{\pi T\cos\vartheta_0}{k} + \left[P - \frac{T(1+k^2)\cos\vartheta_0}{2k}\right] \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2} +$$

$$+ T\sin\vartheta_0 \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1 + 2k\cos\vartheta + k^2} +$$

$$+ \left(Q\cos\frac{\vartheta_0}{2} - S\sin\frac{\vartheta_0}{2}\right) \int\limits_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\cos\dfrac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{(1+k)^2 - 4k\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}} +$$

$$+\left(Q \sin \frac{\vartheta_0}{2} + S \cos \frac{\vartheta_0}{2}\right) \int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin \frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{(1-k)^2 + 4k\cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (80)$$

Calculons toutes ces intégrales. On a d'abord:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \int_{-\pi+\vartheta_0}^{-\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} + \int_{\pi}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2}$$

Posons dans la prémière intégrale:

$$\vartheta = \varphi - 2\pi$$

alors:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{-\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \int_{\pi+\vartheta_0}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+2k\cos\varphi+k^2} = -\int_{\pi}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2}$$

donc:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} \quad \ldots\ldots \quad (81)$$

Comme la fonction sous le signe de l'intégrale est paire, on a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = 2\int_{0}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2}$$

On effectue l'intégration à l'aide de la transformation:

$$t = tg\,\frac{\vartheta}{2}$$

et on obtient:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(1+k)^2+(1-k)^2t^2} =$$

$$= \frac{2}{1-k^2}\, arctg\, \frac{1-k}{1+k}\, t \,\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{\pi}{1-k^2}$$

donc, en vertu de (81):

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \frac{2\pi}{1-k^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

De la même manière on a:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2}$$

puisque la fonction à intégrer est périodique de période 2π. Puis, comme elle est impaire:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = 0$$

donc:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1+2k\cos\vartheta+k^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

Les deux dernières intégrales de la formule (80) se calculent facilement à l'aide des transformations:

$$\xi = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

pour la première intègrale, et:

$$\xi = \cos\frac{\vartheta}{2}$$

pour la deuxième. On obtient:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{(1+k)^2-4k\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{(1+k)\sqrt{k}} \lg \frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}} \quad . \quad (84)$$

et:

$$\int_{-\pi+\vartheta_0}^{\pi+\vartheta_0} \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta}{(1-k)^2+4k\cos^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{2}{(1-k)\sqrt{k}}\, Arctg \frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k} \quad . \; . \; . \quad (85)$$

En substituant dans (80) les valeurs obtenues des intégrales (82), (83), (84) et (85) on parvient à la formule:

$$L = \frac{\pi T\cos\vartheta_0}{k} + \frac{2\pi}{1-k^2}\left[P - \frac{T(1+k^2)\cos\vartheta_0}{2k}\right] +$$

$$+\frac{Q\cos\frac{\vartheta_0}{2}-S\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{(1+k)\sqrt{k}}\lg\frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}+$$

$$+\frac{2\left(Q\sin\frac{\vartheta_0}{2}+S\cos\frac{\vartheta_0}{2}\right)}{(1-k)\sqrt{k}}\,Arctg\,\frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k}.$$

Mais, en vertu des formules (77):

$$P-\frac{T(1+k^2)\cos\vartheta_0}{2k}=\frac{4k\left[(1+k^2)\cos\vartheta_0+2k\right]}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}$$

puis:

$$Q\cos\frac{\vartheta_0}{2}-S\sin\frac{\vartheta_0}{2}=-\frac{4k\cos\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1+k)^2+4k\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}$$

et:

$$Q\sin\frac{\vartheta_0}{2}+S\cos\frac{\vartheta_0}{2}=\frac{4k\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1-k)^2-4k\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}$$

donc:

$$L=\frac{8k}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}\left\{\pi\cos\vartheta_0+\frac{\pi\left[(1+k^2)\cos\vartheta_0+2k\right]}{1-k^2}-\right.$$

$$-\frac{\cos\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1+k)^2+4k\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{2(1+k)\sqrt{k}}\lg\frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}+$$

$$\left.+\frac{\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1-k)^2-4k\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{(1-k)\sqrt{k}}\,Arctg\,\frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k}\right\}.$$

La formule (79) donne maintenant:

$$J=\frac{2}{1+2k\cos\vartheta_0+k^2}+\frac{4k}{(1+2k\cos\vartheta_0+k^2)^2}\left\{\frac{\pi\left[(1+k^2)\cos\vartheta_0+2k\right]}{1-k^2}-\right.$$

$$-\frac{\cos\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1+k)^2+4k\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{2(1+k)\sqrt{k}}\lg\frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}+$$

$$\left.+\frac{\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1-k)^2-4k\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{(1-k)\sqrt{k}}\,Arctg\,\frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k}\right\}.$$

En substituant dans (71) on obtient:

$$P_y = \frac{8\sigma A k u^2 h \cos\alpha}{\pi (1 + 2k\cos\vartheta_0 + k^2)^2} \left\{ (1 + 2k\cos\vartheta_0 + k^2) + \frac{2k\pi\left[(1+k^2)\cos\vartheta_0 + 2k\right]}{1-k^2} + \right.$$

$$+ \frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1-k)^2 - 4k\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{1-k} \, Arctg \, \frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k}$$

$$\left. - \frac{\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1+k)^2 + 4k\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{1+k} \lg \frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}} \right\} \quad . \; . \; (86)$$

ou à l'aide de (58a):

$$P_y = \frac{8\sigma k (1-k^2) u^2 h \sin\alpha\cos\alpha}{\pi (R + 2k\cos\beta)(1 + 2k\cos\vartheta_0 + k^2)^2} \left\{ 1 + 2k\cos\vartheta_0 + k^2 + \right.$$

$$+ \frac{2k\pi\left[(1+k^2)\cos\vartheta_0 + 2k\right]}{1-k^2} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1-k)^2 - 4k\cos^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{1-k} \, Arctg \, \frac{2\sqrt{k}\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{1-k} -$$

$$\left. - \frac{\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}\left[(1+k)^2 + 4k\sin^2\frac{\vartheta_0}{2}\right]}{1+k} \lg \frac{1+k+2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}}{1+k-2\sqrt{k}\cos\frac{\vartheta_0}{2}} \right\} \quad . \; . \; (87)$$

Comme on a déjà établi, la valeur de P_x se détermine par la formule:

$$P_x = -\frac{\sigma k u^2 h \sin^2\alpha}{R}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R - 2k\cos\beta}{R + 2k\cos\beta}\right)^2 . \quad . \; . \; . \; . \; . \; (64)$$

Nous rapportons les axes des coordonnées à la direction α de la vitesse à l'infini. En désignant par P_{x1} et P_{y1} les composantes de la pression suivant ces axes, on a:

$$P_{x1} = P_y \sin\alpha + P_x \cos\alpha$$

$$P_{y1} = P_y \cos\alpha - P_x \sin\alpha . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (88)$$

Introduisons maintenant le rapport:

$$\lambda = \frac{P_{y1}}{P'_{y1}}$$

où:

$$P'_{y1} = 2\sigma u^2 l \sin\alpha$$

comme c'était fait à la fin du chap. III.

On peut écrire les formules (64) et (87) sous la forme abrégée:

$$P_x = -\sigma u^2 h \sin^2 \alpha \, . \, M$$

$$P_y = 8 \sigma u^2 h \sin \alpha \cos \alpha \, . \, N$$

où M et N sont indépendants de α.

En vertu de (88) on a:

$$P_{y1} = 8 \sigma u^2 h \sin \alpha \cos^2 \alpha \, . \, N + \sigma u^2 h \sin^3 \alpha \, . \, M$$

et:

$$\lambda = 4 N \frac{h}{l} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} M \frac{h}{l} \sin^2 \alpha$$

ou, d'une manière approchée, en négligeant les termes de rang α^2:

$$\lambda = 4 N \frac{h}{l}.$$

JULJAN BONDER, ing. et PIOTR SZYMAŃSKI, dr. phil.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DU BIPLAN.

Dans cette étude il s'agit d'examiner l'influence de la disposition des ailes d'un biplan sur la valeur de sa force portante.

Nous ne considérerons que l'écoulement autour d'un biplan avec les ailes indéfiniment longues ayant comme profil deux segments rectilignes, égaux et parallèles.

Nous allons établir le champ de vitesses de cet écoulement en nous servant d'une forme particulière de la représentation conforme.

CHAPITRE I.

UNE REPRÉSENTATION CONFORME DE DEUX ARCS DU CERCLE SUR DEUX SEGMENTS ÉGAUX ET PARALLÈLES.

Soient AB et CD deux arcs égaux du cercle $|Z| = a$, situés dans le plan de la variable complexe $Z = X + iY$. Supposons que les valeurs de la variable Z correspondant aux points A, B, C et D soient:

$a e^{i\vartheta_0}$, $a e^{i(\pi - \vartheta_0)}$, $a e^{-i\vartheta_0}$, $a e^{-i(\pi - \vartheta_0)}$.

Fig. 1.

Envisageons la représentation du plan de Z sur le plan de la variable $z = x + iy$, définie par la formule:

$$\frac{dz}{dZ} = f'(Z) = -i \sin\beta \left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) + \cos\beta \frac{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2\varepsilon}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2\cos^2\vartheta_0}} \quad , \ldots\ldots, \quad (1)$$

où ε et β désignent les paramètres. Nous supposons que:

$$o < \vartheta_0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

La fonction de transformation $z = f\,(Z)$ se déterminera alors comme:

$$z = f\,(Z) = \int_{Z_0}^{Z} f'\,(Z)\, dZ = -\,i\,\sin\beta \int_{Z_0}^{Z} \left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) dZ +$$

$$+ \cos\beta \int_{Z_0}^{Z} \frac{\left(Z + \dfrac{a^2}{Z}\right)^2 - 4\,a^2 \cos^2 \varepsilon}{Z \sqrt{\left(Z + \dfrac{a^2}{Z}\right)^2 - 4\,a^2 \cos^2 \vartheta_0}}\, dZ \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

où l'intégration s'effectue suivant le chemin déterminé joignant le point Z_0 avec le point Z. Le point Z_0 peut être pris arbitrairement,

La fonction à intégrer ayant le pôle $Z = 0$ et quatre points critiques $Z = a\,e^{i\,\vartheta_0}$, $a\,e^{i\,(\pi - \vartheta_0)}$, $a\,e^{-\,i\,\vartheta_0}$, $a\,e^{-\,i\,(\pi - \vartheta_0)}$, la fonction de transformation (2) est non uniforne. En effet, l'intégrale indéfinie (2) admet des périodes cycliques provenant des lacets décrits autour de points critiques A, B, C et D (le seul période polaire provenant du pôle $Z = 0$ est égal á zéro).

Cependant, il est aisé de définir une détermination uniforme de la fonction (2) qui transforme la région extérieure du cercle $|Z| = a$ en une région du plan de z.

Il suffit pour cela de se borner dans la formule (2) aux chemins situés à l'extérieur du cercle $|Z| = a$.

En effet, tout chemin fermé situé à l'extérieur du cercle $|Z| = a$ ne renferme aucun point critique dans son intérieur, ou bien y contient tous les quatre. Dans tous les cas l'intégrale (2) obtient la valeur zéro.

Pour que la transformation soit entièrement définie, il faut encore fixer le point Z_0 aussi que la détermination du radical $\sqrt{\left(Z + \dfrac{a^2}{Z}\right)^2 - 4\,a^2 \cos^2 \vartheta_0}$ dans ce point.

Nous posons $Z_0 = a$, ce qui fait correspondre l'origine du plan de z à l'origine M des arcs du cercle $|Z| = a$. Quant au radical, nous l'admettons positif au point M. Ces conventions faites, la transformation est déjà définie.

Nous allons étudier maintenant la courbe qui correspond dans le plan de z au cercle $|Z| = a$. Pour obtenir la valeur de z correspondant à un point quelconque P situé sur la circonférence du cercle $|Z| = a$, il suffit d'appliquer la formule (2) en suivant un chemin d'intégration quelconque joignant M et P et parcourant en dehors du cercle. Nous conviendrons d'effectuer l'intégration indiquée suivant l'arc du cercle $|Z| = a$ en évitant les points critiques situés sur cet arc par des demi-circonférences décrites au dehors du cercle. Comme l'intégrale (2), prise le long d'une quelconque de ces demi-circonférences, tend vers zéro avec le rayon de cette demi-circonférence, le chemin d'intégration se réduit à la suite des arcs du cercle $|Z| = a$ dont aucun ne renferme de points critiques, qui sont tous situés à leurs extremités. (Fig. 2). Il ne faut pas d'ailleurs oublier que l'argument du radical $\sqrt{\left(Z + \dfrac{a^2}{Z}\right)^2 - 4\,a^2 \cos^2 \vartheta_0}$ doit être augmenté de $\dfrac{\pi}{2}$ chaque fois quand on passe par un point critique.

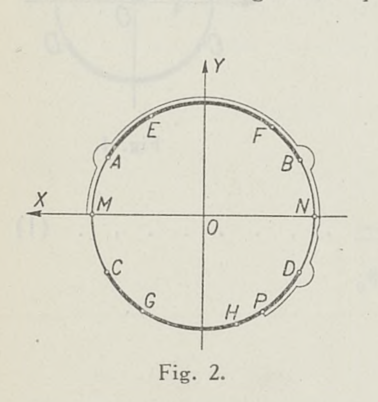


Fig. 2.

Ces remarques faites, passons aux calculs.

Posons :

$$Z = a e^{i\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Alors :

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{2}{ie^{i\vartheta}}\left[\sin\beta\cos\vartheta + i\cos\beta\,\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et :

$$z = f(Z) = 2a\sin\beta\sin\vartheta + 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Supposons d'abord $0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0$ c.-à-d. que P est situé sur l'arc MA. La formule (5) nous montre que la partie réelle et la partie imaginaire de z sont tous deux positives. Elles croissent constamment quand ϑ varie de 0 à ϑ_0.

Le point P_1 du plan de z, correspondant au point P, décrit donc une ligne $M_1 A_1$ (Fig. 3). La valeur de z au point A_1 que nous désignons par $z\,(A_1)$ est:

$$z\,(A_1) = 2a\sin\beta\sin\vartheta_0 + 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

En passant maintenant par le point critique A, l'argument du radical

$$\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}$$

obtient l'accroissement $\frac{\pi}{2}$, donc pour $\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \vartheta_0$ on a:

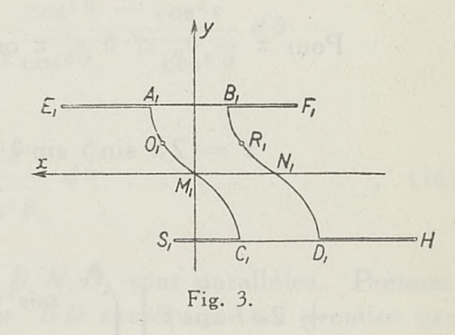


Fig. 3.

$$z = 2a\sin\beta\sin\vartheta + 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta +$$

$$+ 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Si ϑ varie de ϑ_0 à $\pi - \vartheta_0$ la partie imaginaire de z c.-à-d. l'ordonnée du point P_1 reste constante. Quant à l'abscisse du point P_1, elle se compose de deux parties. La première $2a\sin\beta\sin\vartheta$ augmente pour $\vartheta_0 \leqslant \vartheta < \frac{\pi}{2}$ et pour $\frac{\pi}{2} < \vartheta \leqslant \pi - \vartheta_0$ elle décroit, pendant que la deuxième exprimée par l'intégrale croit pour $\vartheta_0 \leqslant \vartheta < \varepsilon$ et $\pi - \varepsilon < \vartheta \leqslant \pi - \vartheta_0$ et diminue pour $\varepsilon < \vartheta < \pi - \varepsilon$. Leur somme a donc un maximum pour une valeur ϑ_1 de ϑ comprise entre ε et $\frac{\pi}{2}$ et un minimum pour une valeur $\pi - \vartheta_2$ située dans l'intervalle $(\pi - \varepsilon,\ \pi - \vartheta_0)$. Par conséquent, l'abscisse du point P_1 va d'abord en croissant quand ϑ varie de ϑ_0 jusqu'à ϑ_1, ensuite elle diminue dans l'intervalle $(\vartheta_1,\ \pi - \vartheta_2)$ et enfin augmente pour $\pi - \vartheta_2 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$. Le point P_1 décrira une ligne brisée $A_1 E_1 F_1 B_1$ où:

$$z\,(E_1) = 2a\sin\beta\sin\vartheta_1 + 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta +$$

$$+ 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$z\,(F_1) = 2a\sin\beta\sin\vartheta_2 + 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_2}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta +$$

$$+ 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

et:

$$z\,(B_1) = 2a\sin\beta\sin\vartheta_0 + 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta +$$

$$+ 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Pour $\pi - \vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ on obtient la formule:

$$z = 2a\sin\beta\sin\vartheta + 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta +$$

$$+ 2ai\cos\beta\left[\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta - \int_{\pi-\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\right]. \quad (11)$$

Le point P_1 décrira maintenant une ligne $B_1 N_1$ où:

$$z\,(N_1) = 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta + 2ai\cos\beta\left[\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta -\right.$$

$$\left. - \int_{\pi-\vartheta_0}^{\pi}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\right] = 2a\cos\beta\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta \;. \quad (12)$$

En procédant de la même manière on obtient pour $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant 0$ l'image de l'arc $MCDN$ qui sera une ligne $M_1 C_1 G_1 H_1 D_1 N_1$. On a:

$$z\,(C_1) = -2a\sin\beta\sin\vartheta_0 - 2ai\cos\beta\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \; . \quad (13)$$

$$z\,(G_1) = -\,2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta_2 - 2a\,\cos\beta\int\limits_{-\vartheta_0}^{-\vartheta_2}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\, -$$

$$-\,2ai\,\cos\beta\int\limits_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}} = -\,2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta_2 +$$

$$+\,2a\,\cos\beta\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_2}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta - 2ai\,\cos\beta\int\limits_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\,. \quad (14)$$

$$z\,(H_1) = -\,2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta_1 + 2a\,\cos\beta\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_1}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\, -$$

$$-\,2ai\,\cos\beta\int\limits_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (15)$$

$$z\,(D_1) = -\,2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta_0 + 2a\,\cos\beta\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\, -$$

$$-\,2ai\,\cos\beta\int\limits_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;,\quad (16)$$

Il est aisé de vérifier que les lignes $A_1 M_1 C_1$ et $B_1 N_1 D_1$ sont parallèles. Prenons pour cela deux points Q et R; l'un sur AC, l'autre sur BD symétrique au premier par rapport à l'axe des Y. Les valeurs corespondant de z seront:

$$z\,(Q_1) = 2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta + 2ai\,\cos\beta\int\limits_0^{\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\;.\;.\;.\quad (17)$$

et:

$$z\,(R_1) = 2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta + 2a\,\cos\beta\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\, +$$

$$+\,2ai\,\cos\beta\left[\int\limits_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta - \int\limits_{\pi-\vartheta_0}^{\pi-\vartheta}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta\right]\quad (18)$$

ou:

$$z\,(R_1) = 2a\,\sin\beta\,\sin\vartheta + 2a\,\cos\beta\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\, +$$

$$+ 2ai \cos\beta \int_0^{\vartheta} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\, d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

par conséquent:

$$z\,(Q_1) - z\,(R_1) = -\,2a \cos\beta \int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \quad . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Les points Q_1 et R_1 ont donc la même ordonnée, la différence de leurs abscisses étant indépendante de ϑ. On peut choisir ε de manière que cette différence soit nulle. Dans ce cas les points Q_1 et R_1 coincident quel que soit la valeur de ϑ, à condition que cette valeur ne surpasse ϑ_0 par la valeur absolue. La ligne en question prendra la forme indiquée sur la fig. 4. Nous nous bornerons dans la suite à l'étude de ce cas particulier. Supposons donc que:

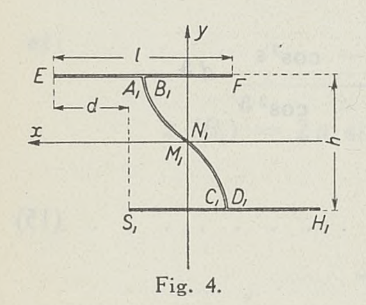


Fig. 4.

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\, d\vartheta = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (21)$$

d'où:

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}}{\displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}} \quad \text{et} \quad \sin^2\varepsilon = \frac{\displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}}{\displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}} \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Comme $\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \vartheta_0$, on a:

$$\cos^2\vartheta \leqslant \cos^2\vartheta_0$$

donc

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \leqslant \cos^2\vartheta_0 \int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}$$

d'où:

$$\cos^2\varepsilon \leqslant \cos^2\vartheta_0$$

par conséquent:

$$\vartheta_0 \leqslant \varepsilon,$$

ce qui s'accorde avec l'hypothèse déjà faite.

Après avoir fait ce choix du paramètre ε, on obtient la fonction de transformation dépendant de deux paramètres arbitraires β et ϑ_0. Cette fonction transforme le cercle $|Z| = a$ en ligne brisée $M_1 A_1 E_1 F_1 B_1 N_1 D_1 H_1 G_1 C_1 M_1$ représentée sur la fig. 4. Nous nous occuperons maintenant de la forme de cette ligne. Désignons par l la longueur du côté $E_1 F_1 = G_1 H_1$ de cette ligne et par h la distance de deux segments $E_1 F_1$ et $G_1 H_1$. Soit d le déplacement du segment $E_1 F_1$ par rapport au segment $G_1 H_1$. (Fig. 4).

Nous aurons les formules:

$$h = 4\,a \cos\beta \int\limits_{0}^{\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

$$l = z(E_1) - z(F_1) = 2\,a \sin\beta\,(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2) + 2\,a \cos\beta \int\limits_{\pi-\vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta \quad (24)$$

Mais en vertu de (21):

$$\int\limits_{\pi-\vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta = \int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta - \int\limits_{\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_2} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta =$$

$$= \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta + \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta$$

donc:

$$l = 2\,a \sin\beta\,(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2) + 2\,a \cos\beta \left[\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_2} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

Enfin, selon (8) et (14):

$$d = 2\,a \sin\beta\,(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2) + 2\,a \cos\beta \int\limits_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta \quad . \; . \quad (26)$$

Tous ces expressions renferment des intégrales se réduisant aux intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce. Nous allons effectuer cette reduction.

CALCUL DE ε.

On a selon (22):

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\displaystyle\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}}{\displaystyle\int\limits_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}}$$

posons:

$$\sin\varphi = \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta_0}$$

alors:

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = \cos^2\vartheta_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

ou suivant les notations habituelles:

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} -$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - 2E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)$$

De la même manière:

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} = 2F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)$$

donc:

$$\cos^2\varepsilon = \frac{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{et:} \quad \sin^2\varepsilon = \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}$$

CALCUL DE ϑ_1 ET ϑ_2.

Les angles ϑ_1 et ϑ_2 présentent les valeurs de ϑ pour lesquelles l'abscisse du point transformé P_1 obtient la valeur maximum ou la valeur minimum. En différentiant donc la partie réelle de (7) par rapport à ϑ et en égalant ensuite à zéro la dérivée obtenue, on trouve l'équation qui sert à déterminer ϑ_1 et ϑ_2:

$$\sin\beta\cos\vartheta + \cos\beta\,\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

ou:

$$\cos^4\vartheta - (2\cos^2\beta\cos^2\varepsilon + \sin^2\beta\cos^2\vartheta_0)\cos^2\vartheta + \cos^2\beta\cos^4\varepsilon = 0$$

d'où :

$$\cos^2\vartheta_1 = \cos^2\beta\cos^2\varepsilon + \frac{\sin^2\beta\cos^2\vartheta_0}{2} -$$

$$- \frac{\sin\beta}{2}\sqrt{\sin^2\beta\cos^4\vartheta_0 + 4\cos^2\beta\cos^2\varepsilon(\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon)} \quad . \; . \; . \; . \quad (29)$$

$$\cos^2\vartheta_2 = \cos^2\beta\cos^2\varepsilon + \frac{\sin^2\beta\cos^2\vartheta_0}{2} +$$

$$+ \frac{\sin\beta}{2}\sqrt{\sin^2\beta\cos^4\vartheta_0 + 4\cos^2\beta\cos^2\varepsilon(\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon)} \quad . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Il est aisé de vérifier que:

$$\vartheta_0 < \vartheta_2 < \varepsilon < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$$

En tenant compte de signes du radical $\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}$ et de $\cos\vartheta$ dans l'équation (28), on s' assurera bientôt que les valeurs de ϑ correspondant aux points *E*, *F*, *G*, *H* (Fig. 2) seront respectivement : ϑ_1, $\pi - \vartheta_2$, $-\vartheta_2$ et $-\pi + \vartheta_1$.

CALCUL DE *h*.

Selon (23):

$$h = 4a\cos\beta\left[\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}} - \cos^2\varepsilon\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\right] \quad . \quad (23a)$$

Posons:

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta_0\sin\varphi$$

alors:

$$\int_0^{\vartheta_0}\frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \sin^2\vartheta_0\sin^2\varphi}\, d\varphi = E\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)$$

de même:

$$\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} = F\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)$$

par conséquent:

$$h = 4a\cos\beta\left[E\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\varepsilon\, F\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ou, en vertu de (27):

$$h = 4a\cos\beta\left[E\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)} F\left(\sin\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Mais, on a la relation[1]):

$$F\left(\cos\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) E\left(\sin\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) + E\left(\cos\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) F\left(\sin\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- F\left(\cos\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) F\left(\sin\Theta,\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

donc:

$$h = \frac{2a\pi\cos\beta}{F\left(\cos\vartheta_0,\ \frac{\pi}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

CALCUL DE l.

La formule (24) donne:

$$l = 2a\sin\beta\,(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2) - 2a\cos\beta\left[\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta_2} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\,d\vartheta\right] \quad \ldots\ldots \quad (24a)$$

Posons:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0\sin\varphi; \quad \text{et:} \quad \sin\varphi_{1,2} = \frac{\cos\vartheta_{1,2}}{\cos\vartheta_0}$$

alors:

$$\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} = F(\cos\vartheta_0,\ \varphi_1)$$

et:

$$\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - \cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\cos\vartheta_0,\ \varphi_1).$$

De la même manière:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = -\int_0^{-\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\vartheta_0\sin^2\varphi}} = F(\cos\vartheta_0,\ \varphi_2)$$

---

[1]) Cf. par ex. Lucien Lévy. Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques. Paris, 1898. p 84, formule (73).

et:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta_2} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} = -\int_0^{-\varphi_2} \sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi_2} \sqrt{1-\cos^2\vartheta_0 \sin^2\varphi}\, d\varphi = E\,(\cos\vartheta_0,\ \varphi_2).$$

En substituant dans (24a), on obtient:

$$l = 2a\sin\beta\,(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2) + 2a\cos\beta\,\{E(\cos\vartheta_0,\varphi_1) +$$
$$+ E(\cos\vartheta_0,\varphi_2) - \sin^2\varepsilon\,[F(\cos\vartheta_0,\varphi_1) + F(\cos\vartheta_0,\varphi_2)]\}$$

ou, en vertu de (27):

$$l = 2a\sin\beta(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2) + 2a\cos\beta\,\{[E(\cos\vartheta_0,\varphi_1) + E(\cos\vartheta_0,\varphi_2)] -$$

$$- \frac{E\left(\cos\vartheta_0,\ \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0,\ \frac{\pi}{2}\right)}\,[F(\cos\vartheta_0,\varphi_1) + F(\cos\vartheta_0,\varphi_2)]\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (32)$$

où:

$$\varphi_1 = arc\sin\frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_0}; \quad \text{et:} \quad \varphi_2 = arc\sin\frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_0} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (33)$$

CALCUL DE *d*.

La formule (26) peut s'écrire:

$$d = 2a\sin\beta\,(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2) + 2a\cos\beta\left[\int_{\vartheta_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\, d\vartheta -\right.$$

$$\left. - \int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\, d\vartheta\right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (26\,a)$$

On obtient, comme auparavant:

$$\int_{\vartheta_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\, d\vartheta = \sin^2\varepsilon\, F(\cos\vartheta_0,\varphi_2) - E(\cos\vartheta_0,\varphi_2)$$

et:

$$\int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varepsilon - \sin^2\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}}\, d\vartheta = \sin^2\varepsilon\, F(\cos\vartheta_0,\varphi_1) - E(\cos\vartheta_0,\varphi_1)$$

d'où:

$$d = 2a \sin\beta\,(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2) + 2a\cos\beta\,\{E(\cos\vartheta_0, \varphi_1) - E(\cos\vartheta_0, \varphi_2) - $$
$$- \sin^2\varepsilon\,[F(\cos\vartheta_0, \varphi_1) - F(\cos\vartheta_0, \varphi_2)]\}$$

par conséquent, à l'aide de (27)

$$d = 2a \sin\beta\,(\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta_2) + 2a\cos\beta\,\{E(\cos\vartheta_0, \varphi_1) - E(\cos\vartheta_0, \varphi_2) -$$

$$- \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}\,[F(\cos\vartheta_0, \varphi_1) - F(\cos\vartheta_0, \varphi_2)]\} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

où φ_1 et φ_2 sont déterminés par (33).

Ainsi toutes les quantités qui servent à déterminer la forme de la courbe transformée sont exprimées à l'aide des paramètres a, β et ϑ_0.

CHAPITRE II.

LA FORCE PORTANTE D'UN BIPLAN.

Considérons les profils du biplan disposés selon la fig. 5; cette disposition correspond à la fonction de représentation, définie plus haut (form. 1 et 27)

$$\frac{dz}{dZ} = -i\sin\beta\left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) + \cos\beta\,\frac{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2\cos^2\varepsilon}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2\cos^2\vartheta_0}},$$

où:

$$\cos^2\varepsilon = \frac{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'écoulement autour de ces profils. Cet écoulement doit devenir uniforme à l'infini. Nous désignerons par u la valeur absolue de la vitesse à l'infini et par α l'angle qu'elle fait avec la direction négative de l'axe des x. Ainsi la vitesse complexe de notre écoulement doit remplir la condition:

$$(v_x - i v_y)_{|z| = \infty} = -u e^{i\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

S'il s'agit du cas particulier $\alpha = 0$ ou bien $\alpha = \pi$, le champ correspondant de vitesses peut être exprimé d'une manière immédiate et simple. En effet, dans ce cas, on a dans le plan z tout entier:

$$v_x - i v_y = \mp u. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Dans les autres cas, nous allons examiner le champ de vitesses à l'aide de la fonction de représentation conforme (1) qui fait correspondre à la région extérieure du cercle $|Z| = a$ du plan Z — le plan z tout entier.

On passe ensuite du champ de vitesses du plan Z à celui du plan z, en se servant de la formule connue:

$$v_x - i v_y = (v_X - i v_Y) \cdot \frac{dZ}{dz}, \qquad (37)$$

où $v_X - i v_Y$ est la vitesse complexe de l'écoulement dans le plan Z et la dérivée $\frac{dZ}{dz}$ est donnée par la formule (1) du chapitte I.

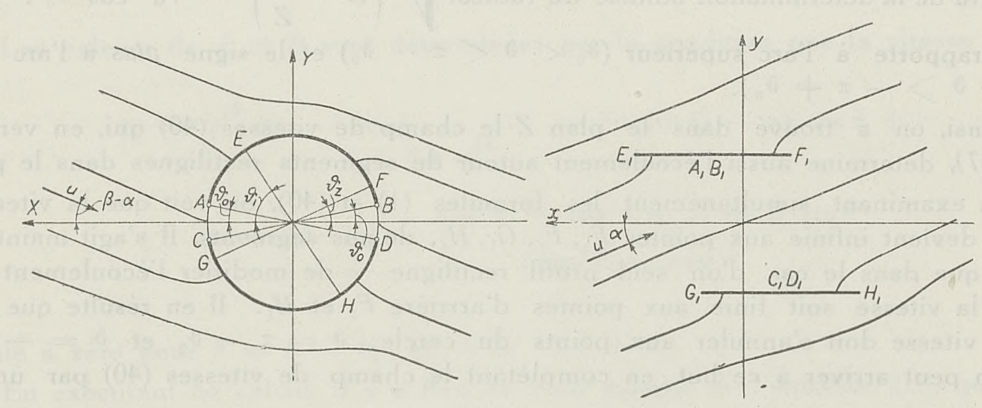


Fig. 5.

Il en resulte que dans le cas $\alpha = 0$ la vitesse complexe dans le plan Z s'exprime à l'extérieur du cercle $|Z| = a$ par la formule:

$$v_X - i v_Y = i u \sin\beta \left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) - u \cos\beta \frac{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \varepsilon}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \vartheta_0}}; \qquad (38)$$

la signification des paramètres β, ϑ_0, ε est expliquée au chapitre I. On obtient de la form. (38) la valeur suivante de la vitesse complexe à l'infini:

$$(v_X - i v_Y)_{|Z| = \infty} = i u \sin\beta - u \cos\beta = - u e^{-i\beta} \qquad (39)$$

Envisageons maintenant dans ce plan Z l'écoulement modifié de manière que sa vitesse à l'infini soit décalée de l'angle α de la position précédente (39):

$$v_X - i v_Y = i u \sin(\beta - \alpha) \left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) -$$

$$- u \cos(\beta - \alpha) \frac{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \varepsilon}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \vartheta_0}}; \qquad (40)$$

$$(v_X - i v_Y)_{|Z| = \infty} = - u e^{i(\alpha - \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Il est facile de vérifier que c'est encore la vitesse complexe d'un écoulement autour de nos arcs du cercle $|Z| = a$. En effet, pour $Z = a e^{i\vartheta}$ et $\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$ ou bien $-\vartheta_0 > \vartheta > -\pi + \vartheta_0$, la vitesse se reduit à la composante v_c tengente au cercle[1]):

$$v_c = -2u \sin(\beta - \alpha) \cos\vartheta \mp 2u \cos(\beta - \alpha) \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \; ; \quad . \quad . \quad (42)$$

ici, en vertu de la détermination admise du radical $\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2\cos^2\vartheta_0}$, le signe *moins* se rapporte à l'arc supérieur $(\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0)$ et le signe *plus* à l'arc inférieur $(-\vartheta_0 > \vartheta > -\pi + \vartheta_0)$.

Ainsi, on a trouvé dans le plan Z le champ de vitesses (40) qui, en vertu de la formule (37), détermine aussi l'écoulement autour de segments rectilignes dans le plan z [2]).

En examinant simultanément les formules (1) et (40), on voit que la vitesse dans le plan z devient infinie aux pointes E_1, F_1, G_1, H_1, de nos segments. Il s'agit maintenant — de même que dans le cas d'un seul profil rectiligne — de modifier l'écoulement de manière que la vitesse soit finie aux pointes d'arrrière F_1 et H_1. Il en résulte que dans le plan Z la vitesse doit s'annuler aux points du cercle: $\vartheta = \pi - \vartheta_2$ et $\vartheta = -\pi + \vartheta_1$

On peut arriver à ce but en complétant le champ de vitesses (40) par un champ suivant:

$$v_X - i v_Y = 2au \cos(\beta - \alpha) \frac{2aA - iB\left(Z - \frac{a^2}{Z}\right)}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2\cos^2\vartheta_0}}, \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

ce qui donne les valeurs de vitesse sur l'arc supérieur (signe +) et sur l'arc inférieur (signe —) du cercle $|Z| = a$:

$$v_c = \pm 2u \cos(\beta - \alpha) \frac{A + B\sin\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

La partie de cette expression qui dépend du coefficient A a sur les deux arcs les signes contraires, tandis que celle qui dépend de B a les mêmes signes. Il en résulte aussi que le terme avec le coefficient B produit la circulation positive autour de tous les deux segments rectilignes ($E_1 F_1$ et $G_1 H_1$); quant à celui avec le coefficient A, il augmente la

[1]) Les composantes de la vitesse suivant le rayon vectuer et la perpendiculaire au rayon vecteur s'expriment par la formule:

$$v_\vartheta + i v_r = (v_X - i v_Y) \, . \, i e^{i\vartheta}.$$

[2]) Il y a lieu de remarquer que — grâce à la détermination du paramètre ε $\left[\text{form. 27: } \sin^2\varepsilon = \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}\right]$ — le potentiel qui correspond au champ de vitesses en question est uniforme. Ainsi, pour une courbe quelconque renfermant un seul ou tous les deux segments, la circulation est égale à zèro

circulation autour du segment supérieur et diminue celle qui correspond au segment inférieur.

Ainsi le champ de vitesses complété s'exprime à l'aide de la formule:

$$v_X - iv_Y = iu \sin(\beta - \alpha)\left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) -$$

$$- u \cos(\beta - \alpha) \frac{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \varepsilon - 4a^2 A + 2iaB\left(Z - \frac{a^2}{Z}\right)}{Z\sqrt{\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)^2 - 4a^2 \cos^2 \vartheta_0}} \quad . \; . \; (45)$$

Les valeurs de A et B sont déterminées par la condition que la vitesse

$$v_c = ie^{i\vartheta}(v_X - iv_Y)_{Z = ae^{i\vartheta}} = -2u \sin(\beta - \alpha)\cos\vartheta \pm$$

$$\pm 2u \cos(\beta - \alpha) \frac{-\cos^2\vartheta + \cos^2\varepsilon + A + B \sin\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

soit égale à zéro pour $\vartheta = \pi - \vartheta_2$ et $\vartheta = -\pi + \vartheta_1$.

En exécutant ce calcul, il y a lieu de tenir compte de l'équation (28) qui sert à déterminer les paramètres ϑ_1 et ϑ_2; on en peut tirer les relations:

$$\sin\beta \cos\vartheta_2 - \cos\beta \frac{\cos^2\vartheta_2 - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta_2}} = 0; \quad \sin\beta \cos\vartheta_1 + \cos\beta \frac{\cos^2\vartheta_1 - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta_1}} = 0. \quad (47)$$

Par conséquent, on peut écrire les équations servant à déterminer les coefficients A et B, sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(\beta - \alpha)\cos\vartheta_2 + \cos(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\beta \frac{-\cos^2\vartheta_2 + \cos^2\varepsilon + A + B\sin\vartheta_2}{\cos^2\vartheta_2 - \cos^2\varepsilon}\cos\vartheta_2 = 0;\\
&\sin(\beta - \alpha)\cos\vartheta_1 + \cos(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\beta \frac{-\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\varepsilon + A - B\sin\vartheta_1}{\cos^2\vartheta_1 - \cos^2\varepsilon}\cos\vartheta_1 = 0;
\end{aligned}\right\} (48)$$

ou bien:

$$-\sin\alpha(\cos^2\vartheta_2 - \cos^2\varepsilon) + \cos(\beta - \alpha)\sin\beta(A + B\sin\vartheta_2) = 0;$$

$$-\sin\alpha(\cos^2\vartheta_1 - \cos^2\varepsilon) + \cos(\beta - \alpha)\sin\beta(A - B\sin\vartheta_1) = 0;$$

d'où:

$$A = \frac{\sin\alpha(\sin^2\varepsilon - \sin\vartheta_1 . \sin\vartheta_2)}{\sin\beta\cos(\beta - \alpha)}; \qquad B = \frac{\sin\alpha(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)}{\sin\beta\cos(\beta - \alpha)} \quad . \; . \; . \; (49)$$

Nous passons maintenant à l'étude de l'influence de la disposition des segments rectilignes sur les valeurs des forces portantes. Nous nous bornerons à la comparaison des valeurs de ces forces avec celle de la force portante qui agit sur un seul profil rectiligne de la longueur $2l$. Dans ce dernier cas, nous appliquons le potentiel de Joukowski,

qui resulte du reste, comme nous le verrons plus loin, de nos formules comme un cas limite. Ainsi on aura:

$$f(z) = F(Z) = -u\left(Ze^{i\alpha} + \frac{l^2 e^{-i\alpha}}{4Z}\right) - ilu \sin\alpha \lg \frac{Z}{l}, \quad \text{avec: } z = Z + \frac{l^2}{4Z}. \quad (50)$$

La force portante, relative à ce segment unique, s'exprime donc par la formule connue:

$$P_y = \sigma u C, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

où C désigne la circulation autour de ce profil; en vertu de (50), on a:

$$C = 2\pi lu \sin\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Nous admettons dans la suite que la valeur de la force portante qui agit sur un de nos segments rectilignes (E_1 F_1 ou G_1 H_1) peut être exprimée d'une manière approchée par la même formule (51): $P_y \simeq \sigma u C$; par conséquent, on peut remplacer la comparaison des forces portantes en question par la comparaison des circulations.

Introduisons encore les notations suivantes:

C_1 — la valeur de la circulation autour du segment supérieur E_1 F_1;
C_2 — „ „ „ „ „ „ „ „ inférieur G_1 H_1.

La circulation le long d'un profil, comme on le sait, ne subit dans la représentation conforme aucune variation; par conséquent, on peut aussi exprimer les valeurs des circulations C_1 et C_2 à l'aide des formules:

$$C_1 = \int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} v_c \, a \, d\vartheta; \quad C_2 = \int_{-\pi+\vartheta_0}^{-\vartheta_0} v_c \, a \, d\vartheta. \quad \ldots \ldots \quad (53)$$

En y introduisant l'expression (46) de la vitesse v_c et en tenant compte de la condition (21):

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \, d\vartheta = 0,$$

on obtient:

$$C_1 = 2au \cos(\beta - \alpha) \int_{\vartheta_0}^{\pi-\vartheta_0} \frac{A + B\sin\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \, d\vartheta,$$

$$C_2 = -2au \cos(\beta - \alpha) \int_{-\pi+\vartheta_0}^{-\vartheta_0} \frac{A + B\sin\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\vartheta}} \, d\vartheta,$$

d'où:

$$C_1 = 2au \cos(\beta - \alpha) \left[2A . F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + \pi B\right]; \quad \ldots \ldots \quad (54)$$

$$C_2 = 2au \cos(\beta - \alpha) \left[-2A . F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + \pi B\right]; \quad \ldots \ldots \quad (55)$$

$$C_1 + C_2 = 4\pi au \, B \cos(\beta - \alpha). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

Ayant déterminé les expressions ci-dessus, introduisons les rapports:

$$\lambda_1 = \frac{C_1}{C}, \quad \lambda_2 = \frac{C_2}{C}, \quad \lambda = \frac{C_1 + C_2}{C}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

qui doivent caractériser la portance des ailes du biplan en question relativement à la portance du monoplan ayant l'aile dont la largeur est égale à la somme des largeurs des ailes du biplan c'est-à-dire à — $2l$.

En vertu de (54 — 57), (52) et (49), on obtient:

$$\lambda_1 = \frac{C_1}{C} = \frac{a}{l} \cdot \frac{2E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - 2\sin\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 \cdot F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + \pi(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)}{\pi \sin\beta}, \quad (58)$$

$$\lambda_2 = \frac{C_2}{C} = \frac{a}{l} \cdot \frac{-2E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\vartheta_1 \cdot \sin\vartheta_2 \cdot F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) + \pi(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)}{\pi \sin\beta}, \quad (59)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\frac{a}{l} \cdot \frac{\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2}{\sin\beta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

où le quotient $\frac{a}{l}$ est déterminé par les formules (32) et (33).

Les formules précédentes constituent, dans le cas général, la solution du problème posé. Quelques cas particuliers exigent toutefois une discussion spéciale.

1°. Soit ϑ_0 très voisin de $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire: $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \delta$, où δ désigne une très petite quantité positive. En négligeant les puissances de δ plus élevées que δ^2, nous obtenons successivement:

$$\cos\vartheta_0 = \sin\delta \cong \delta;$$

$$E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \cong \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right);$$

$$F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) \cong \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2\varphi}} \cong \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right);$$

$$\sin^2\varepsilon = \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)} \cong \frac{1 - \frac{\delta^2}{4}}{1 + \frac{\delta^2}{4}} \cong 1 - \frac{\delta^2}{2}; \qquad \cos^2\varepsilon \cong \frac{\delta^2}{2}; \quad . \quad . \quad (61)$$

$$E(\cos\vartheta_0, \varphi) \cong \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \cong \varphi\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) + \frac{\delta^2}{8} \sin 2\varphi;$$

$$F(\cos\vartheta_0, \varphi) \cong \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\delta^2 \sin^2\varphi}} \cong \varphi\left(1+\frac{\delta^2}{4}\right) - \frac{\delta^2}{8} \sin 2\varphi;$$

on tire ensuite de (29) et (30):

$$\cos^2\vartheta_1 \cong \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} \sin\beta = \delta^2 \sin^2 \frac{\pi - 2\beta}{4},$$

$$\cos^2\vartheta_2 \cong \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} \sin\beta = \delta^2 \cos^2 \frac{\pi - 2\beta}{4} = \delta^2 \sin^2 \frac{\pi + 2\beta}{4};$$

d'où:

$$\sin\vartheta_1 \cong 1 - \frac{\delta^2}{2} \sin^2 \frac{\pi - 2\beta}{4}; \qquad \sin\vartheta_2 \cong 1 - \frac{\delta^2}{2} \cos^2 \frac{\pi - 2\beta}{4}; \quad \ldots (62)$$

on a encore à cause de (33):

$$\varphi_1 = arc \sin \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_0} \cong \frac{\pi - 2\beta}{4}; \qquad \varphi_2 = arc \sin \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_0} \cong \frac{\pi + 2\beta}{4}; \quad \ldots (63)$$

en introduisant ces expressions dans les formules (31), (32) et (34). on obtient:

$$h \cong 4a \cos\beta; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

$$l \cong a\delta^2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$d \cong 4a \sin\beta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

On voit que les quotients $\frac{h}{l} \cong \frac{4\cos\beta}{\delta^2}$ et $\frac{d}{l} \cong \frac{4\sin\beta}{\delta^2}$ augmentent en général indéfiniment (à l'exception de $\beta = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$), lorsque ϑ_0 tend vers $\frac{\pi}{2}$.

On a, en même temps, en vertu des formules (58 — 60):

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{2}; \qquad \lambda_2 \cong \frac{1}{2}; \qquad \lambda \cong 1;$$

ou bien:

$$C_1 \cong C_2 \cong \frac{1}{2} C. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, (67)$$

De cette façon on a prouvé que, dans le cas de deux profils éloignés indéfiniment $\left(\frac{h}{l} = \infty \text{ ou } \frac{d}{l} = \infty\right)$, l'écoulement en question produit autour du chaque profil la même circulation que celle correspondant à l'écoulement de Joukowski autour d'un seul profil dont la longueur est égale à l.

2°. Soit maintenant $\beta = 0$; les profils se trouvent donc un au-dessus de l'autre. Dans ce cas, on ne peut pas se servir des formules (58 — 60) parce que leurs dénomina-

teurs et numérateurs s'annulent. Il faut donc calculer les formules en question spécialement pour ce cas. On a selon (29) et (30):

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

donc:

$$h = \frac{2\pi a}{F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

en introduisant encore la notation $\varphi_0 = arc \sin \frac{\cos\varepsilon}{\cos\vartheta_0}$, on peut écrire:

$$l = 4a\,[E(\cos\vartheta_0, \varphi_0) - \sin^2\varepsilon\, F(\cos\vartheta_0, \varphi_0)]; \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

$$d = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Ensuite, les équations servant à déterminer les coefficients A et B prendront la forme:

$$-\sin\alpha\cos\varepsilon + \cos\alpha\frac{A + B\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon}} = 0;$$

$$-\sin\alpha\cos\varepsilon - \cos\alpha\frac{A - B\sin\varepsilon}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon}} = 0;$$

il en resulte:

$$A = 0; \qquad B = tg\alpha\; ctg\varepsilon\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Donc

$$C_1 = C_2 = 2\pi a u \sin\alpha\; ctg\varepsilon\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon}, \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

d'où:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{l}\, ctg\varepsilon\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon}; \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\frac{a}{l}\, ctg\varepsilon\sqrt{\cos^2\vartheta_0 - \cos^2\varepsilon}. \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

3⁰. Soit encore: $\beta = \frac{\pi}{2}$.

On trouve aisément:

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}; \qquad \vartheta_2 = \vartheta_0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

$$h = 0; \qquad l = 2a\,(1 - \sin\vartheta_0); \qquad d = 2a\,(1 + \sin\vartheta_0); \quad \ldots \quad (77)$$

$$A = \sin^2\varepsilon - \sin\vartheta_0; \qquad B = 1 - \sin\vartheta_0; \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - \sin\vartheta_0\, F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,(1 - \sin\vartheta_0)}; \quad \ldots \quad (79)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{E\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right) - \sin\vartheta_0 F\left(\cos\vartheta_0, \frac{\pi}{2}\right)}{\pi\,(1 - \sin\vartheta_0)}; \quad . . . . \quad (80)$$

$$\lambda = 1 \quad . . . . \quad (81)$$

On voit donc que, si les deux profils rectilignes sont situés l'un à la suite de l'autre, la somme des circulations $C_1 + C_2$ ne dépend pas du tout de leur distance. C'est le même résultat que l'on a obtenu dans le travail précédent quoique le champ de vitesses qui y fut discuté était tout différent.

4°. Enfin, dans le cas $\vartheta_0 = 0$, on obtient un seul profil au lieu de deux profils distincts. En effet, selon la form. (27), on a: $\varepsilon = 0$; donc la fonction de transformation (1) prendra la forme:

$$\frac{dz}{dZ} = -i\sin\beta\left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) + \cos\beta\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) = e^{-i\beta} - e^{i\beta}\,\frac{a^2}{Z^2}. \quad . . . \quad (82)$$

Faisons encore tourner, dans le plan Z, les axes des coordonnées d'un angle β, en introduisant dans la form. (82) la substitution: $Z = Z'\,e^{i\beta}$ — on aura:

$$\frac{dz}{dZ'} = 1 - \frac{a^2}{Z'^2}. \quad . . . . \quad (83)$$

Comme on voit, ce n'est que la fonction de transformation du cercle en un seul profil rectiligne.

Ensuite, en vertu de (29) et (30):

$$\vartheta_1 = \beta; \qquad \vartheta_2 = 0; \quad . . . . \quad (84)$$

donc (51):

$$A = 0; \qquad B = \frac{\sin\alpha}{\cos\,(\beta - \alpha)}. \quad . . . . \quad (85)$$

Ainsi la vitesse complexe (48) prendra la forme:

$$v_X - i v_Y = i u \sin\,(\beta - \alpha)\left(1 + \frac{a^2}{Z^2}\right) -$$

$$- u \cos\,(\beta - \alpha)\left(1 - \frac{a^2}{Z^2}\right) + 2 i u a \sin\alpha\,\frac{1}{Z}; \quad . . . . \quad (86)$$

ou bien, en passant aux coordonnées $Z' = X' + i\,Y'$, on obtient:

$$v_{X'} - i v_{Y'} = -u e^{i\alpha} + \frac{a^2}{Z'^2}\,e^{-i\alpha} + \frac{2 i u a \sin\alpha}{Z'}, \quad . . . . \quad (87)$$

ce qui définie le champ de vitesses bien connu de l'écoulement de Joukowski.

